超関数1/xを定義する汎関数の主値の収束

2018年9月19日
小林　保

(1) 積分区間から点x＝0を除外

超関数$\frac{1}{x}$を定義する汎関数の式(1)は点x＝0を積分区間に含むために積分不能である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (積分不能) \qquad (1)$$

積分区間から点x＝0を除外して積分可能にするために区間$-\varepsilon<x<\varepsilon$を除外した式(2)を考える。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (2)$$

式(2)を式(3)のように分けて考える。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (3)$$

(2) 第1項の計算

式(4)のように計算されるから式(5)が成り立つ。

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx$$
$$=[\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon}+[\log|x|]_{\varepsilon}^{1}$$
$$=(\log|-\varepsilon|-\log|-1|)+(\log|1|-\log|\varepsilon|)$$
$$=0 \qquad (4)$$

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{1}{x}dx=0 \qquad (5)$$

式(5)に注意すれば式(3)の右辺の第1項は式(6)のように計算される。

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)}{x}dx-\phi(0)\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{1}{x}dx$$
$$=\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \qquad (6)$$

関数$\phi(x)$は急減少関数であるからマクローリン展開が可能で、式(7)が得られる。

$$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}=\frac{\phi'(0)}{1!}+\frac{\phi''(0)}{2!}x+\cdots \qquad (7)$$

式(7)の右辺を見ると、式(7)は点x＝0を含む区間$-1<x<1$において有限で連続であり、式(8)の積分が有限な値を持つことがわかる。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \qquad (8)$$

$\varepsilon\to 0$の極限を考えることにより、式(9)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \qquad (9)$$

式(9)の右辺の積分区間が点x＝0を含んでいることに注意すべきである。式(6)で$\varepsilon\to 0$の極限を考え、式(9)を代入すれば、式(3)の右辺第1項が有限な値を持つことがわかる。

(3) 第2項の計算

区間$|x|>1$においては式(10)が成り立つから式(11)が成り立つ。

$$\left|\frac{1}{x}\right|<1 \qquad (10)$$

$$\int_{|x|>1}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|dx\leqq\int_{|x|>1}|\phi(x)|dx \qquad (11)$$

式(11)を用いて式(12)の不等式が成り立つ。

$$\int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{x}dx\leqq\int_{|x|>1}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|dx\leqq\int_{|x|>1}|\phi(x)|dx$$
$$\leqq\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x)|dx \qquad (12)$$

関数$\phi(x)$は急減少関数であり、式(12)の第4辺が有限な値を持ち、式(12)の不等式から、式(12)の第1辺が有限な値を持つ。式(3)の第2項は式(12)の第1辺と等しいから、式(3)の右辺第2項が有限な値を持つことがわかる。

(4) 錯覚

式(6)が成り立つのであれば式(13)が成り立ちそうであるが錯覚である。

$$\frac{\phi(x)}{x}x=\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} \qquad (錯覚) \qquad (13)$$

式(13)が成り立つとは限らない。式(13)が成り立ち、式(8)の積分が有限な値を持てば、式(14)の積分も有限な値を持つことになり、最初の想定に反し、式(3)の右辺の第1項を考える意味が無い。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (積分不能) \qquad (14)$$

式(6)が成り立っても式(13)が成り立つとは限らないから注意が必要である。式(6)の第2辺の第2項の積分で式(5)を用いるから、x＝0を除外した区間$\varepsilon<|x|<1$を積分区間としなければならない。式(6)の第3辺を積分するときも、第2辺に合わせて、区間$\varepsilon<|x|<1$を積分区間としているが、第3辺の被積分関数は点x＝0を含む区間$-1<x<1$で積分可能である。式(13)が成り立たないのに式(6)が成り立つことが推論の要点である。

(5) 汎関数の主値

式(3)の右辺第1項と右辺第2項が有限な値を持つから、式(3)の左辺も、従って式(2)も、有限な値を持つ。式(2)が式(1)と異なることを意識して式(2)は主値と呼ばれる。$\varepsilon\to 0$の極限を考えるとき、式(2)の主値は収束する。