成分表示型の超関数

2013年11月18日
小林　保

(1) 近似関数

独立変数xと特異化変数εを含む近似関数F(x)を用いて、超関数f(x)を定義する。関数F(x)が近似関数であるためには、次の条件を満足しなければならない。近似関数F(x)が無限回微分可能であるであること。下記の式(1)～式(4)の成分が収束すること。0でない値を持つ成分の個数が有限個であること。

(2) 成分の定義

近似関数F(x)と点半径変数ρを用いて、超関数f(x)の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・を式(1)～式(4)で計算する。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}F(x-\rho) \qquad (1)$$

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\} \qquad (2)$$

$$f_1(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}F(t)\,dt \qquad (3)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・

$$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt \qquad (4)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・

式(4)の左辺の添え字のnと右辺の冪指数n-1がずれていることに注意する。式(1)～式(4)は、区間$x-\rho\leqq t\leqq x+\rho$における近似関数F(x)の状況から点t＝xにおける成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・を計算している。近似関数F(x)についての区間$x-\rho\leqq t\leqq x+\rho$を超関数f(x)の点t＝xについての点域と呼び、補助変数ρを点半径変数と呼ぶ。式(1)～式(4)の計算において、特異化変数εは点半径変数ρより速く極限変動する。$f_h(x)$を左連続成分、$f_d(x)$を段差成分、$f_1(x)$を1次成分、・・・、$f_n(x)$をn次成分、・・・と呼ぶ。成分数は無限個である。

(3) 超関数の表示

成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・を点 , で区切って並べ、括弧 { } で包んで、ベクトルと同じ表現で、超関数f(x)を式(5)で表す。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),\cdots,f_n(x),\cdots\} \qquad (5)$$

式(5)の表現を関数配列と呼ぶ。記号1、Γ、$\uparrow$、・・・、$\uparrow^n$、・・・を基底ベクトルとし、ベクトルと同じ表現で、超関数f(x)を式(6)で表す。

$$f(x)=f_h(x)+f_d(x)\Gamma+f_1(x)\uparrow+\cdots+f_n(x)\uparrow^n+\cdots \qquad (6)$$

式(6)の表現を関数擬値と呼ぶ。記号Γを段差単位、記号$\uparrow$を横軸単位と言う。

(4) 定義域

式(1)～式(4)で計算される成分の全部が収束する点xで超関数f(x)が定義される。超関数f(x)が定義される点xの集合が定義域である。超関数f(x)の定義域は区間であり、実数a、bを用いて、下端の表示a≦、a＜、$-\infty$＜のいずれかと上端の表示≦b、＜b、＜$+\infty$のいずれかで独立変数xを挟んで表示する。超関数f(t)の点t＝xが近似関数F(t)の点域$x-\rho\leqq t\leqq x+\rho$と対応するから、近似関数F(x)の定義域は点半径変数ρを含んで表示される。超関数の下端の表示a≦が近似関数の下端の表示$a-\rho\leqq$と対応し、超関数の下端の表示a＜が近似関数の下端の表示$a+\rho\leqq$と対応し、超関数の下端の表示$-\infty$＜が近似関数の下端の表示$-\infty$＜と対応する。超関数の上端の表示≦bが近似関数の上端の表示≦$b+\rho$と対応し、超関数の上端の表示＜bが近似関数の上端の表示≦$b-\rho$と対応し、超関数の上端の表示＜$+\infty$が近似関数の上端の表示＜$+\infty$と対応する。

(5) 特異点と通常点

左連続成分$f_h(x)$以外の成分$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・の中に、0でない値を持つ成分がある点xを、超関数f(x)の特異点と呼ぶ。特異点でない点xを、超関数f(x)の通常点と呼ぶ。通常点は連続的に存在するが、特異点は離散的にしか存在しない。段差成分$f_d(x)$が0でない値を持つ点を段差点と呼ぶ。n次成分$f_1(x)$が0でない値を持つ点をn次の集中点と呼ぶ。

(6) 同等な近似関数

2つの近似関数F(x)、G(x)から計算された成分が式(7)～式(10)を満足するとき、2つの近似関数F(x)とG(x)は同等であると言う。

$$f_h(x)=g_h(x) \qquad (7)$$

$$f_d(x)=g_d(x) \qquad (8)$$

$$f_1(x)=g_1(x) \qquad (9)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$f_n(x)=g_n(x) \qquad (10)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

近似関数F(x)とG(x)が同等であるとき、式(7)～式(10)を式(5)または式(6)に代入すれば、式(11)が得られる。

$$f(x)=g(x) \qquad (11)$$

同等な近似関数は無数に多く存在する。

(7)　特異化変数を含まない近似関数

近似関数F(x)が特異化変数εを含まないとき、式(1)～式(4)に代入して計算し、式(5)に代入して関数配列で表わせば、式(12)が得られる。

$$f(x)=(F(x),0,0,0,\cdots,0,\cdots) \qquad (12)$$

式(6)に代入して関数擬値で表わせば、式(13)が得られる。

$$f(x)=F(x)+0\cdot\Gamma+0\cdot\uparrow+0\cdot\uparrow^2+\cdots+0\cdot\uparrow^n+\cdots$$
$$=F(x) \qquad (13)$$

式(12)、式(13)は、左連続成分以外の成分が全て0である。式(13)においては、超関数f(x)と近似関数F(x)の見かけが同じになる。

特異化変数εを含む近似関数G(x)が、式(14)のように特異化変数εを含まない近似関数F(x)に収束するとき、近似関数G(x)を式(1)～式(4)に代入して計算し、式(5)に代入して超関数g(x)を関数配列で表わせば、式(15)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G(x)=F(x) \qquad (14)$$

$$g(x)=(F(x),0,0,0,\cdots,0,\cdots) \qquad (15)$$

式(12)と式(15)の右辺は一致し、近似関数G(x)と近似関数F(x)は同等である。例えば、式(16)の近似関数G(x)は式(17)の近似関数F(x)と同等である。

$$G(x)=\varepsilon x^2+(1+\varepsilon)x+3+\varepsilon^2 \qquad (16)$$

$$F(x)=x+3 \qquad (17)$$