

(1) 標準化関数

式(1)の関数 $\Delta(x)$ は標準化関数であり、ディラック関数 $\delta(x)$ の近似関数の1つである。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1)$$

式(2)の曲線の特徴を調べてを図-1のように図示する。

$$y = \Delta(x) \quad (2)$$

(2) 包絡線

式(3)と式(4)の曲線が式(1)の近似関数 $\Delta(x)$ の包絡線である。

$$y = \frac{1}{\pi x} \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{\pi x} \quad (4)$$

曲線上の点の座標は表-1のように計算される。

x	0.25	0.5	1	2	3
y	1.274	0.637	0.314	0.159	0.106

表-1 第1象限の数表

式(1)の曲線が式(3)の曲線と接する点は方程式式(5)の解であり、式(6)で表される。

$$\frac{1}{\pi x} \{1 - \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{x}{\varepsilon} = \dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (6)$$

式(1)の曲線が式(4)の曲線と接する点は式(6)と同じように式(7)で表される。

$$\frac{x}{\varepsilon} = \dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \quad (7)$$

(3) 極値

式(1)の近似関数 $\Delta(x)$ を微分すると式(8)が得られる。

$$\Delta'(x) = \frac{1}{\pi x} \left\{ -\frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \quad (8)$$

$\Delta'(x) = 0$ とすると式(9)が得られる。

$$\tan \frac{x}{\varepsilon} = \frac{x}{\varepsilon} \quad (9)$$

方程式(9)の解として $x=0$ の他に、式(6)、式(7)の値より絶対値がわずかに小さい値が得られる。

$x = -\frac{\pi}{2}$ と $x = \frac{\pi}{2}$ より絶対値がわずかに小さい点

は極値を与えず曲線の接線が水平になるだけであるが、その他の各点は点 $x=0$ が最大になり、両側に交互に極小と極大が繰り返し現れる。点 $x=0$ 以外の式(9)の解より絶対値がわずかに大きい各点

で式(1)の曲線が式(3)と式(4)の曲線に接する。

(4) 点 $x=0$ における関数値 $\Delta(0)$

式(1)に直接に $x=0$ を代入しても関数値 $\Delta(0)$ は計算できない。式(10)のように変数変換を行うと近似関数 $\Delta(x)$ は式(11)のように変換される。

$$u = \frac{x}{\varepsilon} \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\pi \varepsilon u} \sin(u) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left\{ \frac{1}{u} \sin(u) \right\} \quad (11)$$

$u \rightarrow 0$ の極限を考えると式(12)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y = \frac{1}{\pi \varepsilon} \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{u} \sin(u) \right\} = \frac{1}{\pi \varepsilon} \quad (12)$$

関数値 $\Delta(0)$ は式(13)である。

$$\Delta(0) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \quad (13)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると式(14)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(0) = +\infty \quad (14)$$

(5) $\Delta(x) = 0$ となる点

式(1)で $\Delta(x) = 0$ とすると、式(15)が得られ、式(16)が得られる。

$$\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \quad (15)$$

$$x = \dots, -2\varepsilon\pi, -\varepsilon\pi, 0, \varepsilon\pi, 2\varepsilon\pi, \dots \quad (16)$$

式(16)の各点で式(1)の曲線は x 軸と交差する。

(6) 近似変数 ε を固定

図示するために近似変数 ε を適当に小さい式(17)の値に固定する。

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \quad (17)$$

点 $x=0.5$ 、 $x=1.5$ 、 $x=2.5$ 、 $x=3.5$ が上記の式(6)、式(7)の接点となる。点 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=2$ で上記の式(16)の x 軸と交差する。式(13)の極大値は $\Delta(0) = 1$ である。

(7) 近似変数 ε の変動

近似変数が小さくなると、式(13)の最大値は大きくなる。式(16)の x 軸との交点は点 $x=0$ に近づき、振動が激しくなる。点 $x=1$ について見ると、式(18)が成り立ち、関数値 $\Delta(1)$ は式(19)の範囲で振動し、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(1)$ は収束しない。

$$\Delta(1) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (18)$$

$$-\frac{1}{\pi} \leq \Delta(1) \leq \frac{1}{\pi} \quad (19)$$

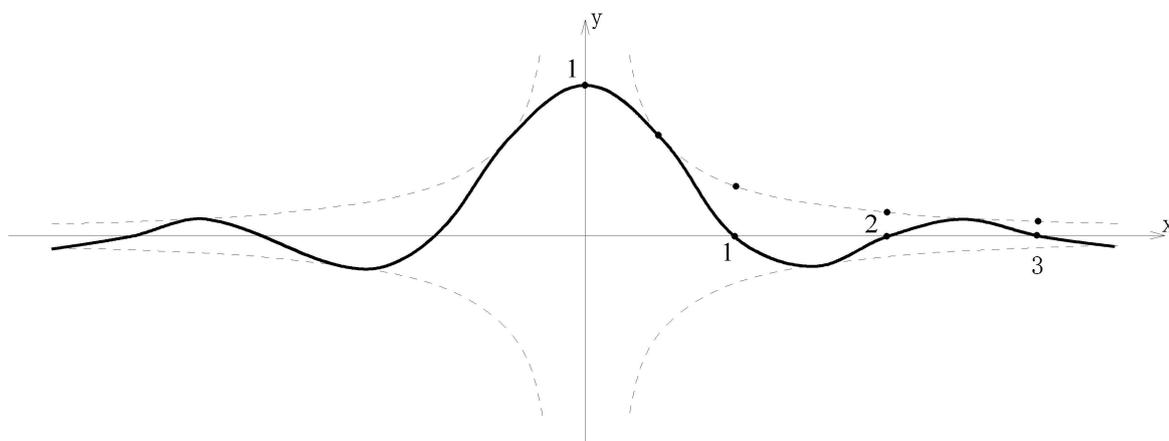


図-1 標準化関数の図示