質問・・・超関数$\frac{1}{x}$

2021年8月29日

小林　保

(1) 超関数$\frac{1}{x}$の主値

超関数$\frac{1}{x}$は急減少関数$\phi(x)$を含む式(1)の汎関数を用いて定義されるが、式(1)の被積分関数は点x＝0において積分不能であり、汎関数が存在しない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx \tag{1}$$

補助変数ρとσを用いて積分区間から点x＝0を除外し、式(2)の右辺を考える。$\rho>0$、$\sigma>0$とする。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx=\lim_{\rho\to+0}\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx \tag{2}$$

式(2)では区間$-\rho<x<\sigma$を除外することにより、点x＝0を除外している。補助変数が別々に$\rho\to0$、$\sigma\to0$と極限変動するとき式(2)の右辺は収束しないが、ρとσが比例して極限変動するとき、式(2)の右辺は収束するので、式(2)の汎関数が超関数$\frac{1}{x}$の主値を定義すると言う。

(2) 主値の収束

[準備・・・積分$\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{1}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{1}{x}dx$の収束]

ρとσが比例して極限変動するとき、式(3)で定数Aを定義する。

$$\log\rho-\log\sigma=\log\frac{\rho}{\sigma}=A \tag{3}$$

式(3)を用いると式(4)が成り立つ。

$$\int_{-1}^{-\rho}\frac{1}{x}dx+\int_{\sigma}^{1}\frac{1}{x}dx=(\log\rho-\log1)+(\log1-\log\sigma)=A \tag{4}$$

式(4)で$\rho\to0$、$\sigma\to0$の極限を取ると式(5)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{1}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{1}{x}dx=A \tag{5}$$

[準備・・・積分$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$の存在]

関数$\phi(x)$が微分可能だから、式(6)の被積分関数は$x\neq0$において連続である。式(6)の被積分関数はx＝0において導関数$\phi'(0)$になるので連続である。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \tag{6}$$

式(6)の被積分関数が区間$-1\leqq x\leqq1$において連続であるから、積分可能であり、式(6)の積分が有限な値を持つ。式(6)の積分を式(7)のように分割すると、被積分関数が連続であるから、式(8)が成り立つ。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$$
$$=\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\int_{-\rho}^{\sigma}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \tag{7}$$

$$\lim_{\rho\to+0}\lim_{\sigma\to+0}\int_{-\rho}^{\sigma}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx=0 \tag{8}$$

式(7)、式(8)から式(9)が成り立つ。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$$
$$=\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx \tag{9}$$

[積分の分割]

式(2)が収束することを確認しよう。式(2)は式(10)のように分割される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx \tag{10}$$

[第1項と第4項の収束]

区間-∞＜x＜-1と区間1＜x＜+∞において被積分関数$\frac{\phi(x)}{x}$は急減少関数だから式(10)の第1項と第4項は有限な値を持つ。

[第2項と第3項の計算]

式(4)の各項に$\phi(0)$をかけて移行すると、式(11)が得られる。

$$A\phi(0)-\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(0)}{x}dx-\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(0)}{x}dx=0 \tag{11}$$

式(10)の第2項と第3項に0を加えても値が変わらないから、式(11)を用いて、式(12)のように計算される。

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx\\
&=\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx+A\phi(0)-\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(0)}{x}dx-\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(0)}{x}dx\\
&=\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx\\
&\qquad-\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(0)}{x}dx-\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(0)}{x}dx+A\phi(0)\\
&=\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+A\phi(0)
\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)に式(9)を代入すれば式(13)が得られる。

$$\lim_{\rho\to+0}\int_{-1}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{1}\frac{\phi(x)}{x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+A\phi(0) \tag{13}$$

式(6)の積分が有限な値を持つから、式(13)の右辺が有限な値を持つ。式(13)は式(10)の第2項と第3項が有限な値を持つことを示している。

[確認－式(2)が収束]

式(10)の第1項と第4項が収束し、式(10)の第2項と第3項が収束するから、式(10)が収束し、式(2)が収束する。式(2)の汎関数が定義する超関数を式(14)と表示しよう。

$$\frac{1}{x}(\text{主値A}) \tag{14}$$

( )書きの主値は積分区間から点x＝0を除外したことを示し、数値Aは式(3)で定義された定数である。

[技巧]

点x＝0において関数$\frac{1}{x}$、関数$\frac{\phi(x)}{x}$が積分不能であるのに、点x＝0において関数$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$が積分可能であることを利用して計算する。技巧的な計算手順である。関数$\frac{\phi(x)}{x}$の積分から関数$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$の積分を導く過程で、積分区間から点x＝0を除外した計算をするので、計算全体としては積分区間から点x＝0を除外した計算になっている。

(3) 2つの主値の関係

式(13)を式(10)に代入し、式(2)の主値について式(14)を用いると、式(15)が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値A})\cdot\phi(x)dx\\
&=\lim_{\rho\to+0}\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\\
&=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+A\phi(0)+\int_{1}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx
\end{aligned} \tag{15}$$

式(3)の定数Aが異なる場合を考えよう。変数τを用いて式(3)と同形の式(16)で定数Aと異なる定数Bを定義する。

$$\log\rho-\log\tau=\log\frac{\rho}{\tau}=B \tag{16}$$

変数ρとσの比と変数ρとτの比が一定で極限変動するから、変数ρを共通にしても一般性を失わない。区間$-\rho$＜x＜τを除外すると式(15)と同形の式(17)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値B})\cdot\phi(x)dx$$

$$\lim_{\rho\to+0}\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{\phi(x)}{x}dx+\lim_{\tau\to+0}\int_{\tau}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+B\phi(0)+\int_{1}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (17)$$

ここで改めて式(18)とおき、式(15)と式(17)の差を取ると式(20)が成り立つ。

$$A-B=C \qquad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値A})\cdot\phi(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値B})\cdot\phi(x)dx=C\phi(0) \qquad (19)$$

式(19)は式(15)と式(17)の2つの主値が任意性を持っていることを示している。汎関数の入力関数$\phi(x)$と任意定数Cを用いて表される$C\phi(0)$が主値$\frac{1}{x}$の任意性の大きさである。式(19)は原始関数が積分定数Cの任意性を持っているのと類似している。式(3)の数値Aが任意の数値、式(16)の数値Bが特定の数値とすると、特定の主値Bを用いて任意の主値Aを式(20)のように表すことができる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値A})\cdot\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値B})\cdot\phi(x)dx+C\phi(0) \qquad (20)$$

(4) 超関数$\frac{1}{x}$とディラック関数$\delta(x)$

ディラック関数の性質から式(21)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)dx=\phi(0) \qquad (21)$$

式(21)をC倍して式(20)に代入すれば式(22)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値A})\cdot\phi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(\text{主値B})\cdot\phi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}C\delta(x)\phi(x)dx \qquad (22)$$

式(22)から式(23)が得られと考えるのは誤りである。

$$\frac{1}{x}(\text{主値A})=\frac{1}{x}(\text{主値B})+C\delta(x) \qquad (23)$$

式(22)は正しいが、式(23)は正しくない。式(22)の表示は必ずしも明示的で無いが、式(22)の第1辺は式(2)の広義積分であり、点x=0を含む区間$\rho<x<\sigma$を除外している。式(22)の第2辺第2項は普通の積分であり、点x=0を含む区間$\rho<x<\sigma$を除外していない。積分区間が異なるので、式(22)から式(23)を導いてはいけない。積分区間を揃えるために、式(22)の第2辺第2項で区間$\rho<x<\sigma$を除外すると式(24)のようになる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}C\delta(x)\phi(x)dx$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\int_{-\infty}^{-\rho}C\delta(x)\phi(x)dx+\lim_{\sigma\to+0}\int_{\sigma}^{+\infty}C\delta(x)\phi(x)dx=0 \qquad (24)$$

式(24)を式(20)に代入しても、式(21)をC倍して式(20)に代入したときと異なって、式(22)が得られない。式(20)は正しいが、式(21)を用いて式(20)から式(22)を導くことは意味のある結果をもたらさない。主値が不確定性を持つことは式(19)や式(20)で表すべきであり、式(23)のようなディラック関数$\delta(x)$を用いて表すべきではない。

(4) 質問・・・広義積分と普通の積分の和

汎関数型の超関数の理論において、式(23)は正しいと考えられていますか?。

$$\frac{1}{x}(\text{主値A})=\frac{1}{x}(\text{主値B})+C\delta(x) \qquad (23)(\text{再掲})$$

正しいと考えられている場合、式(24)を式(20)に代入しても式(22)が得られないのに、式(23)が成り立つのは何故ですか?。

(5) 超関数方程式f(x)=1

未知の超関数f(x)を含む超関数方程式(25)を考える。

$$xf(x)=1 \qquad (25)$$

f(x)が普通の関数であれば方程式(25)の解は式(26)である。

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (26)$$

数値0で割る計算が定義されないので、変数xの変域からx=0を除外する。超関数は急減少関数$\phi(x)$を含む汎関数を用いて表示されるから、式(25)は式(27)を意味している。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,dx \tag{27}$$

式(27)の両辺の被積分関数をxで割ると式(28)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,dx \tag{28}$$

式(28)の右辺は式(1)と同じであるから、主値を計算することになる。主値を計算すると式(20)に示す不確定性を持つ。解超関数f(x)が不確定性を持つから、特定の主値Bと任意定数Cを用いて式(29)のように表される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}(\text{主値B})\cdot\phi(x)\,dx + C\phi(0) \tag{29}$$

式(29)から式(30)を導くのはのは、式(22)から式(23)を導くのと同じで、誤りである。

$$f(x) = \frac{1}{x}(\text{主値B}) + C\delta(x) \tag{30}$$

超関数方程式(25)を形式的に解く方法を説明した教科書がある。式(31)が成り立つから、式(25)を式(32)のように書き換える。

$$x\delta(x) = 0 \tag{31}$$

$$xf(x) = 1 + Cx\delta(x) \tag{32}$$

形式的に両辺をxで割ると式(33)が得られる。

$$f(x) = \frac{1}{x} + C\delta(x) \tag{33}$$

超関数方程式(25)の解が任意性を持っているから、式(33)の右辺第1項は特定の主値であり、式(33)は式(30)と同じである。超関数方程式(25)を式(31)、式(32)を経て形式的に式(33)を導く方法は、式(30)と同じで不適切である。