フーリエ変換と超関数・・・もくじ

2021年8月7日

小林　保

フーリエ変換と超関数

(1) フーリエ変換の定義

[急減少関数のフーリエ変換]

関数f(x)を含む式(1)の右辺の計算の結果得られる式(1)の左辺の関数g(y)を関数f(x)のフーリエ変換と言う。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx \qquad (1)$$

（定義１）

式(1)の関数g(y)を関数f(x)のフーリエ変換と言う。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx \qquad (1)\text{再掲}$$

式(1)は区間$-\infty<x<+\infty$における積分であるから、被積分関数が急減少関数でなければ収束しない。変数xの関数$e^{-2\pi ixy}$は緩増加関数であるから式(1)のf(x)が急減小関数でなければ、式(1)は収束しない。関数$\exp(-x^2)$が急減小関数であるから、関数$\exp(-x^2)$を式(1)に代入した式(2)は収束する。しかし、式(2)を変形して、より簡単な式を導くことはできない。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\exp(-x^2)\,dx \qquad (2)$$

単に、式(2)のフーリエ変換g(y)が存在すると言えるだけである。

[有限区間におけるフーリエ変換]

２つの実数a、bとして区間$a\leqq x\leqq b$で連続であり、区間の外で関数値が0である関数f(x)のフーリエ変換は、式(3)のように計算され、存在する。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx \qquad (3)$$

関数f(x)が２点x＝a、x＝bで不連続であっても、式(3)のフーリエ変換は存在する。区間x＜a、b＜xにおける関数値が0の関数f(x)は、長さが無限の区間$-\infty<x<+\infty$における積分が収束するという意味では、急減少関数と考えて良い。関数値1の定数関数f(x)についてa＝−1、b＝1として式(3)を適用すると、関数f(x)は式(4)、式(5)で表され、フーリエ変換

g(y)は式(6)のように計算される。

$$f(x)=1 \qquad (-1\leqq x\leqq 1) \tag{4}$$

$$f(x)=0 \qquad (x<-1、1<x) \tag{5}$$

$$g(y)=\int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixy}\cdot 1\cdot dx=\int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\frac{1}{-2\pi iy}\left[e^{-2\pi ixy}\right]_{-1}^{1}=\frac{\sin 2\pi y}{\pi y} \tag{6}$$

関数xについてa=－1、b=1として式(3)を適用すると、関数f(x)は式(7)、式(5)で表され、フーリエ変換g(y)は式(8)のように表される。

$$f(x)=x \qquad (-1\leqq x\leqq 1) \tag{7}$$

$$f(x)=0 \qquad (x<-1、1<x) \qquad \text{(5)(再掲)}$$

$$g(y)=\int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixy}\cdot x\cdot dx=\int_{-1}^{1} xe^{-2\pi ixy}dx \tag{8}$$

部分積分を用いて式(9)のように計算される。

$$g(y)=\frac{1}{-2\pi iy}\left[xe^{-2\pi ixy}\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{-2\pi iy}\int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\frac{i\cos 2\pi y}{\pi y}-\frac{i\sin 2\pi y}{2\pi^2 y^2} \tag{9}$$

(2) フーリエ逆変換

[フーリエ逆変換の定義]

式(1)で関数g(y)を関数f(x)のフーリエ変換と言ったが、逆に、関数f(x)を関数g(y)のフーリエ逆変換と言う。

（定義２）
関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、関数f(x)を関数g(y)のフーリエ逆変換と言う。

式(4)、式(5)の関数f(x)のフーリエ変換が式(6)の関数g(y)であるから、定義２により、式(6)の関数g(y)のフーリエ逆変換は式(4)、式(5)の関数f(x)である。

[フーリエ逆変換の表示式]

関数g(y)のフーリエ逆変換f(x)は陽の形で式(10)で表される。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixy}g(y)dy \tag{10}$$

式(10)は式(1)に対応する。式(10)の証明には式(11)を用る。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi u}\sin\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\phi(u)du=\phi(0) \tag{11}$$

ここでは式(11)は証明せずに定理として用いる。式(12)とおくと、$\phi(0)=f(x)$であるから式(13)が成り立つ。

$$\phi(u)=f(u+x) \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi u}\sin\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)f(u+x)du=f(x) \tag{13}$$

式(14)とおくと、u→－∞のときt→－∞、u→＋∞のときt→＋∞、u=t－x、du=dtであるから式(15)が得られる。

$$u+x=t \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi(t-x)}\sin\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)f(t)dt=f(x) \tag{15}$$

式(16)とおくと式(15)は、ε→＋0のときR→＋∞だから、式(17)のように変形される。

$$2\pi R=\frac{1}{\varepsilon} \tag{16}$$

$$f(x)=\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\pi(x-t)}\sin 2\pi(x-t)R\right\}f(t)dt \tag{17}$$

式(18)が成り立つから、式(18)を式(17)に代入して式(19)のように計算する。

$$\int_{-R}^{+R} e^{2\pi i(x-t)y}dy=\frac{1}{2\pi i(x-t)}\left[e^{2\pi i(x-t)y}\right]_{-R}^{+R}$$

$$=\frac{1}{\pi(x-t)}\sin 2\pi(x-t)R \tag{18}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{R\to+\infty}\left\{\int_{-R}^{+R} e^{2\pi iy(x-t)}dy\right\}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi iy(x-t)}dyf(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{2\pi ixy}\cdot e^{-2\pi ity})f(t)dtdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixy}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ity} f(t)\,dt\right\}dy \qquad (19)$$

式(1)で変数xをtに変えると式(20)が得られる。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ity} f(t)\,dt \qquad (20)$$

式(20)を式(19)に代入すると式(10)が得られる。

(定理１)

関数g(y)のフーリエ逆変換f(x)は式(10)で表される。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixy} g(y)\,dy \qquad (10)\text{再掲}$$

[式(6)のフーリエ逆変換]

式(6)の関数g(y)のフーリエ逆変換が式(4)、式(5)の関数f(x)であることを式(10)で確認しよう。計算に式(21)を用いる。ここでは式(21)は証明せずに定理として用いる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{\pi u}\,du=1 \qquad (21)$$

式(6)を式(10)の右辺に代入すると式(22)のように計算される。

$$g(y)=\frac{\sin 2\pi y}{\pi y} \qquad (6)\text{再掲}$$

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixy} g(y)\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi y}(\sin 2\pi y\cos 2\pi xy+i\sin 2\pi y\sin 2\pi xy)\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi y}\sin 2\pi(1+x)y\,dy+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi y}\sin 2\pi(1-x)y\,dy\\
&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\pi y}\cos 2\pi(1+x)y\,dy\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\pi y}\cos 2\pi(1-x)y\,dy \qquad (22)
\end{aligned}$$

yの関数cos2π(1＋x)yは偶関数、yの関数2πyは奇関数であるから、式(22)の第３項の被積分関数は奇関数であり、区間x＜0と0＜xの積分が打ち消し合って、第3項は0になる。同じように、式(22)の第4項も0になるから、式(22)は式(23)のように計算される。

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\sin 2\pi(1+x)y}{2\pi(1+x)y}\,dy\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)\sin 2\pi(1-x)y}{2\pi(1-x)y}\,dy \qquad (23)
\end{aligned}$$

式(24)、式(25)とおく。

$$2\pi(1+x)y=u \qquad (24)$$

$$2\pi(1-x)y=v \qquad (25)$$

x＜－1のとき、1＋x＜0、0＜2＜1－xであるから、y→－∞のとき、u→＋∞、v→－∞、y→＋∞のとき、u→－∞、v→＋∞となり、式(23)は式(26)のように計算される。

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{(1+x)\sin u}{u}\frac{1}{2\pi(1+x)}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)\sin v}{v}\frac{1}{2\pi(1-x)}\,dv\\
&=\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{2\pi v}\,dv=-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{2\pi v}\,dv\\
&=-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du=0 \qquad (26)
\end{aligned}$$

－1≦x≦1のとき、0≦1＋x、0≦1－xであるから、y→－∞のとき、u→－∞、v→－∞、y→＋∞のとき、u→＋∞、v→＋∞となり、式(21)を用いれば、式(23)は式(27)のように計算される。

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\sin u}{u}\frac{1}{2\pi(1+x)}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)\sin v}{v}\frac{1}{2\pi(1-x)}\,dv\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{2\pi v}\,dv=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du\\
&=2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\pi u}\,du=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{\pi u}\,du=1 \qquad (27)
\end{aligned}$$

1＜xのとき、0＜2＜1＋x、1－x＜0であるから、y→－∞のとき、u→－∞、v→＋∞、y→＋∞のとき、u→＋∞、v→－∞となり、式(23)は式(28)のように計算される。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x)\sin u}{u}\frac{1}{2\pi(1+x)}du+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{(1-x)\sin v}{v}\frac{1}{2\pi(1-x)}dv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{2\pi u}du+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\sin v}{2\pi v}dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{2\pi u}du-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin v}{2\pi v}dv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{2\pi u}du-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{2\pi u}du=0 \qquad (28)$$

式(26)、式(27)、式(28)を整理すると式(4)、式(5)が得られる。

$f(x)=1 \qquad (-1\leqq x\leqq 1)$ 　　(4)(再掲)

$f(x)=0 \qquad (x<-1,\ 1<x)$ 　　(5)(再掲)

式(6)の関数g(y)のフーリエ逆変換が式(4)、式(5)の関数f(x)であることが確認された。

［関数g(x)のフーリエ変換］

式(29)とおくと式(10)は式(30)のようになる。

$$x=-u \qquad (29)$$

$$f(-u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(-u)y}g(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi iuy}g(y)dy \qquad (30)$$

uをyで置き換え、yをxで置き換えると式(30)は式(31)のようになる。

$$f(-y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}g(x)dx \qquad (31)$$

式(31)は式(1)と類似しており、f(−y)がg(x)のフーリエ変換であることを示している。

（定理２）
関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、関数f(−y)が関数g(x)のフーリエ変換である。

［関数g(−x)のフーリエ変換］

式(32)とおくとy→−∞のときu→+∞、y→+∞のときu→−∞であるから式(10)は式(33)のようになる。

$$y=-u \qquad (32)$$

$$f(x)=\int_{+\infty}^{-\infty}e^{2\pi ix(-u)}g(-u)(-du)=-\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-2\pi ixu}g(-u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixu}g(-u)du \qquad (33)$$

式(33)でuをxと書き換え、xをyと書き変えると式(34)が得られる。

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}g(-x)dx \qquad (34)$$

式(34)は式(1)と類似しており、f(y)がg(−x)のフーリエ変換であることを意味している。

（定理３）
関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、f(y)がg(−x)のフーリエ変換である

式(1)、式(10)、式(31)式(34)の３式の関係を見比べると興味深い。

(3) フーリエ変換の線形性

［フーリエ変換の和］

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換、関数q(y)が関数p(x)のフーリエ変換であるとき、関数{f(x)+p(x)}のフーリエ変換は式(35)のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\{f(x)+p(x)\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}p(x)dx$$

$$=g(y)+q(y) \qquad (35)$$

（定理４）
関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換、関数q(y)が関数p(x)のフーリエ変換であるとき、関数{g(y)+q(y)}が関数{f(x)+p(x)}のフーリエ変換である。

［フーリエ変換の定数倍］

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、定数aを用いた関数af(x)のフーリエ変換は式(36)のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\{af(x)\}dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx=ag(y) \qquad (36)$$

（定理５）

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、定数aを用いた関数ag(y)が関数af(x)のフーリエ変換である。

定理４と定理５はフーリエ変換が線形であることを意味している。

定理１を用いて式(35)のように計算すれば、関数f(x)が関数g(y)のフーリエ逆変換、関数p(x)が関数q(y)のフーリエ逆変換であるとき、関数{f(x)+p(x)}が関数{g(y)+q(y)}のフーリエ逆変換である、ことがわかる。定理１を用いて式(36)のように計算すれば、関数f(x)が関数g(y)のフーリエ逆変換であるとき、関数af(x)が関数ag(y)のフーリエ逆変換である、ことがわかる。

(4) 変数の線形変換

［関数f(x－a)のフーリエ変換］

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、関数f(x－a)のフーリエ変換は、式(37)とおくと、式(38)のように計算される。

$$x-a=t \tag{37}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(x-a)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(t+a)y} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ity}\cdot e^{-2\pi iay} f(t)\cdot dt=e^{-2\pi iay}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ity} f(t)\,dt=e^{-2\pi iay} g(y) \tag{38}$$

式(38)は関数$e^{-2\pi iay}g(y)$が関数f(x－a)のフーリエ変換であることを示している。

（定理６）

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、定数aを用いた関数$e^{-2\pi iay}g(y)$が関数f(x－a)のフーリエ変換である。

［関数f(ax)のフーリエ変換］

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、関数f(ax)のフーリエ変換は、式(39)とおくと、a＞0のとき、x→－∞のときt→－∞、x→＋∞のときt→＋∞だから、式(40)のように計算される。

$$ax=t \tag{39}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(ax)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\frac{t}{a}y} f(t)\frac{1}{a}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\frac{y}{a}} f(t)\frac{1}{a}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\frac{y}{a}} f(t)\,dt=\frac{1}{a}g\left(\frac{y}{a}\right) \tag{40}$$

a＜0のとき、x→－∞のときt→＋∞、x→＋∞のときt→－∞だから、式(41)のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(ax)\,dx=\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-2\pi i\frac{t}{a}y} f(t)\frac{1}{a}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\frac{y}{a}} f(t)\frac{1}{a}dt$$

$$=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\frac{y}{a}} f(t)\,dt=-\frac{1}{a}g\left(\frac{y}{a}\right) \tag{41}$$

式(40)と式(41)を整理すると式(42)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(ax)\,dx=\frac{1}{|a|}g\left(\frac{y}{a}\right) \tag{42}$$

a＝0のとき、f(ax)＝f(0)は定数だから、後述の定理９が適用される。

（定理７）

関数g(y)が関数f(x)のフーリエ変換であるとき、式(42)が関数(ax) のフーリエ変換である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(ax)\,dx=\frac{1}{|a|}g\left(\frac{y}{a}\right) \tag{42再掲}$$

定理６と定理７は変数を線形変換したときのフーリエ変換である。

(5) フーリエ変換とディラック関数

定理１の証明のとき、フーリエ変換の定義の式(1)からフーリエ逆変換の式(10)を導くときに式(11)を用いる。式(11)は補助変数εを含む式(43)の関数Δ(x)がディラック関数δ(x)の近似関数であることを意味している。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{43}$$

フーリエ変換の理論においては、理論の基本の部分に式(11)が潜んでいるので、ディラック関数δ(x)の近似関数として式(43)のみを用い、他の近似関数を用いない。成分表示型の理論においては、式(43)はディラッ

ク関数δ(x)の近似関数ではないことに注意すべきである。成分表示型の理論は、フーリエ変換の理論を取り扱うことができない。フーリエ変換の理論は汎関数型の理論と相性が良いが、成分表示型の理論とは相性が悪い。

(6) フーリエ変換の下端と上端の対称性

定理１の証明のとき、フーリエ変換の定義の式(1)からフーリエ逆変換の式(10)を導くとき、式(19)の計算の中で式(44)が用いられる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iy(x-t)}dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi iy(x-t)}dy \tag{44}$$

式(44)の積分の端点の極限については式(45)が本来の形である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iy(x-t)}dy = \lim_{S\to+\infty}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+S} e^{-2\pi iy(x-t)}dy \tag{45}$$

式(45)では極限変数RとSを独立に極限変動させるが、式(44)ではR＝Sとし、積分の下端と上端が対称になっている。式(45)が収束すれば、式(44)も収束するが、式(44)が収束しても、式(45)が収束するとは限らない。式(19)の計算の中で式(45)ではなく、式(44)が用いられていることに注意すべきである。フーリエ変換の理論においては、理論の基本の部分に、積分の下端－∞と上端＋∞の対称性が潜んでいる。

(7) 汎関数収束を表示する等号

補助変数εを含む近似関数F(x)について式(46)が成り立つとき、近似関数F(x)が超関数f(x)を定義すると言う。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)F(x)dx = \tau(\phi) \tag{46}$$

近似関数F(x)が超関数f(x)を定義することを直感的に示すので、式(47)は捨て難い表現ではあるが、式(47)は誤りである。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} F(x) = f(x)\ \cdot\cdot\cdot\cdot\ (\text{誤}) \tag{47}$$

敢えて式(47)の表現を生かすために、式(48)を用いることを提案する。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} F(x) \overset{\text{han}}{=\!=} f(x) \tag{48}$$

記号「$\overset{\text{han}}{=\!=}$」は汎関数収束を表示する等号であり、敢えて等号「＝」と異なる記号を用いる。汎関数を英語でfunctionalと言うが、関数もfunctionであり、頭3文字を略語とすれば両方ともfunになり区別できない。汎関数をhankansuuとローマ字表記し、頭3文字hanを略語とする。略語hanと等号＝を組み合わせて記号「$\overset{\text{han}}{=\!=}$」を作った。

補助変数εを含む近似関数Δ(x)について式(49)が成り立つとき、近似関数Δ(x)がディラック関数δ(x)を定義する。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\Delta(x)dx = \phi(0) \tag{49}$$

式(43)の関数Δ(x)が式(49)を満足するので、ディラック関数δ(x)の近似関数である。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad (43)(\text{再掲})$$

式(43)と式(49)を記号「$\overset{\text{han}}{=\!=}$」を用いて、式(50)のように表示することができる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \overset{\text{han}}{=\!=} \delta(x) \tag{50}$$

しかし、フーリエ変換についての多くの教科書は、式(51)を用いている。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} = \delta(x)\ \cdot\cdot\cdot\cdot\ (\text{不適切}) \tag{51}$$

式(51)は、厳密には不適切であるにもかかわらず、特段の注意も無く、しばしば用いられる。本書では誤解を避けるために、式(51)ではなく、式(50)を用いることにする。

式(52)が成り立ち、式(16)と置くと、R→＋∞のときε→＋0だから、式(53)が成り立つ

$$\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi ixy}dy = \frac{1}{-2\pi ix}\left[e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R} = \frac{1}{\pi x}\sin 2\pi Rx \tag{52}$$

$$2\pi R = \frac{1}{\varepsilon} \qquad (16)(\text{再掲})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi ixy}dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \tag{53}$$

式(50)と式(53)から式(54)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}dy \overset{\text{han}}{=\!=} \delta(x) \qquad (54)$$

式(54)には極限の記号limが明示的には記載されていないが、式(53)を見ると積分端点の－∞と＋∞に極限の記号limが潜んでいることが理解される。式(54)はディラック関数δ(x)のフーリエ積分表示と呼ばれる。略語hanを含む記号を作るとき、初めは、略語hanを極限記号limに付けた記号limhanを用い、式(55)のように用いることを想定した。

$$\underset{\varepsilon\to+0}{\text{limhan}}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}=\delta(x) \qquad (55)$$

式(55)の記号limhanは式(50)の状況をうまく表示することができる。しかし、式(54)では極限記号limが明示されず、式(55)の記号limhanは式(54)の状況をうまく表示できない。略語hanを等号＝に付けた記号$\overset{\text{han}}{=\!=}$用い、式(50)のように表示することにした。

式(43)の関数Δ(x)と急減少関数ϕ(x)の積Δ(x)ϕ(x)を微分して移行すれば式(56)が得られる。

$$\Delta'(x)\phi(x)=\{\Delta(x)\phi(x)\}'-\Delta(x)\phi(x)' \qquad (56)$$

式(56)の両辺を積分すれば、式(57)であるから、式(58)が成り立つ。

$$[\Delta(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty}=0 \qquad (57)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta'(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{-\Delta(x)\phi'(x)\}dx=-\phi'(0) \qquad (58)$$

式(58)は関数Δ'(x)がディラック関数の導関数δ'(x)の近似関数であることを示している。式(59)の関数Δ'(x)がディラック関数の導関数δ'(x)の近似関数である。

$$\Delta'(x)=\frac{1}{\pi\varepsilon x}\cos\frac{x}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi x^2}\sin\frac{x}{\varepsilon} \qquad (59)$$

式(58)、式(59)を式(60)と書ことにする。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\frac{1}{\pi\varepsilon x}\cos\frac{x}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi x^2}\sin\frac{x}{\varepsilon}\}\overset{\text{han}}{=\!=}\delta'(x) \qquad (60)$$

式(58)と同じように式(61)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta''(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi''(x)dx=\phi''(0) \qquad (61)$$

式(61)は関数Δ''(x)がディラック関数の2階導関数δ''(x)の近似関数であることを示している。式(62)の関数Δ''(x)がディラック関数の2階導関数δ''(x)の近似関数である。

$$\Delta''(x)=-\frac{2}{\pi\varepsilon x^2}\cos\frac{x}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi\varepsilon^2 x}\sin\frac{x}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi x^3}\sin\frac{x}{\varepsilon}\} \qquad (62)$$

式(61)、式(62)を式(63)と書かくことにする。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{-\frac{2}{\pi\varepsilon x^2}\cos\frac{x}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi\varepsilon^2 x}\sin\frac{x}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi x^3}\sin\frac{x}{\varepsilon}\}\overset{\text{han}}{=\!=}\delta''(x) \qquad (63)$$

形式的に式(50)の両辺を微分すると式(60)が得られ、さらに式(60)の両辺を微分すると式(63)が得られる。なお、等号「＝」が成り立てば、汎関数収束を表示する等号「$\overset{\text{han}}{=\!=}$」が成り立つが、汎関数収束を表示する等号「$\overset{\text{han}}{=\!=}$」が成り立っても、等号「＝」が成り立つとは限らない。

(8) フーリエ変換の超関数への拡張

[F(x)が急減少関数の場合]

定義１と定義２ではf(x)が関数に限定されていた。フーリエ変換の定義を拡張してf(x)が超関数である場合について考えよう。f(x)が超関数であるとき、補助変数εを含む近似関数F(x)を用いて式(1)を式(64)のように表示することができる。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}F(x)dx \qquad (64)$$

近似関数F(x)が急減小関数であれば、式(64)の第３辺が収束するから、超関数f(x)のフーリエ変換g(y)が存在して、g(y)は関数である。式(64)は急減小関数ϕ(x)を用いた汎関数型の超関数f(x)の定義式(46)を書き換えた式(65)と類似している。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)F(x)dx=\tau(\phi) \qquad (65)$$

式(65)で式(66)とすれば、式(65)の$\tau(\phi)$と式(64)のg(y)が一致する。

$$\phi(x)=e^{-2\pi ixy} \qquad (66)$$

式(65)ではϕ(x)が急減小関数であるから、F(x)が緩増加関数であっても収束するが、式(64)ではϕ(x)が緩増加関数であるから、F(x)が急減

少関数でなければ収束しない。ディラック関数$\delta(x)$の近似関数は急減少関数であるから、式(64)の$f(x)$に式(67)を代入すれば収束する。

$$f(x)=\delta(x) \tag{67}$$

式(64)と式(65)の類似を利用すれば、ディラック関数$\delta(x)$のフーリエ変換$g(y)$は、式(65)、式(66)を用いて式(68)のように計算することができる。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}\delta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\delta(x)\,dx=\phi(0)=1 \tag{68}$$

（定理８）
ディラック関数$\delta(x)$のフーリエ変換は関数値1の定数関数である。

定理８と定義２を組み合わせて考えると、関数値1の定数関数のフーリエ逆変換はディラック関数$\delta(x)$である。

[$f(x)$が急減少関数でない場合]

定義１と定義２では$f(x)$が急減少関数に限定されていた。フーリエ変換の定義を拡張して$f(x)$が急減少関数でない場合について考えよう。関数$f(x)$が急減少関数でない場合は式(1)が収束しないから、フーリエ変換の関数$g(y)$は存在しない。条件に恵まれれば、フーリエ変換の超関数$g(y)$が存在する場合もある。関数値1の定数関数のフーリエ変換は、式(69)を式(1)に代入して式(70)のように表される。

$$f(x)=1 \tag{69}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}\cdot 1\cdot dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi ixy}dx \tag{70}$$

式(70)は積分の下端$-\infty$と上端$+\infty$が対称であることに注意しよう。式(70)の積分は、式(16)とおくと、式(52)、式(53)と同じ計算で、式(71)のように計算される。

$$2\pi R=\frac{1}{\varepsilon} \qquad (16)(再掲)$$

$$\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi ixy}dx=\frac{1}{-2\pi iy}\left[e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R}=\frac{1}{\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon} \tag{71}$$

式(70)に式(71)を代入すれば、$R\to+\infty$のとき$\varepsilon\to+0$だから、式(72)が得られる。

$$g(y)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon} \tag{72}$$

式(51)と同じで、式(72)は収束しないので、関数$g(y)$は存在しない。関数$g(y)$は存在しないが、超関数$g(y)$が存在しないか検討してみる。変数xを変数yと置き換えれば、式(72)の右辺は式(50)の左辺と同じであるから、超関数$g(y)$が存在して式(73)のように表示することができる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\overset{\text{han}}{=\!=}\delta(x) \qquad (50)(再掲)$$

$$g(y)\overset{\text{han}}{=\!=}\delta(y) \tag{73}$$

（定理９）
関数値1の定数関数のフーリエ変換はディラック関数$\delta(y)$である。

定理９と定義２を組み合わせて考えると、ディラック関数$\delta(y)$のフーリエ逆変換は関数値1の定数関数である。

フーリエ変換を超関数へ拡張するときは、定義１の式(1)をそのまま用いることは適切でなく、式(1)を式(74)のように修正すべきである。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx \qquad (1)(再掲)$$

$$g(y)\overset{\text{han}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx \tag{74}$$

[積分の下端と上端の対称]

式(71)積分の端点については、式(44)と式(45)で論じた意味で対称になっている。対称としたので、式(70)から式(71)が得られるが、対称としなければ式(71)は得られないことに注意すべきである。式(70)の積分の端点について、2つの極限変数R､Sを用いると、式(75)のように計算される。

$$g(y)=\lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to+\infty}\int_{-R}^{+S} e^{-2\pi ixy}dx=\lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to+\infty}\frac{1}{-2\pi iy}\left[e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+S}$$
$$=\lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to+\infty}\frac{1}{-2\pi iy}\{(\cos 2\pi yR-\mathrm{coc}\,2\pi yS)-i(\sin 2\pi yR+\sin 2\pi yS)\} \tag{75}$$

極限変数RとSを独立に極限変動させると式(75)は式(72)のような単純な形にならず、収束の判断も難しい。式(73)の収束は式(75)でR＝Sとしたことに依る収束であることにも注意しておきたい。

[F(x)が急減少関数で無い場合]

定義１と定義２ではf(x)が急減少関数に限定されていた。フーリエ変換の定義を拡張してf(x)が超関数であって、近似関数F(x)が急減少関数でない場合について考えよう。近似関数F(x)を用いて式(1)を式(64)のように表示することができる。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}F(x)dx \qquad (64)(再掲)$$

近似関数F(x)が急減小関数でない場合は式(64)の第３辺が収束しないから、フーリエ変換の関数g(y)は存在しない。条件に恵まれれば、フーリエ変換の超関数g(y)が存在する場合もある。ヘビサイド関数のフーリエ変換について26頁に後述するが、f(x)とg(y)の両方ともが超関数の事例である。汎関数収束する場合であるから、汎関数収束を表示する等号 $\overset{han}{=\!=}$ を用いて式(74)のように表示する。

$$g(y)\overset{han}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx \qquad (74)(再掲)$$

(9) ディラック関数のn階導関数 $\delta^{(n)}(x)$ のフーリエ変換

$e^{-2\pi ixy}\delta^{(n-1)}(x)$ を微分すれば式(76)が得られる。

$$e^{-2\pi ixy}\delta^{(n)}(x)=\{e^{-2\pi ixy}\delta^{(n-1)}(x)\}'+2\pi iye^{-2\pi ixy}\delta^{(n-1)}(x) \qquad (76)$$

式(76)の両辺を積分すれば、式(77)であるから、階数nについての漸化式(78)が得られる。

$$\left[e^{-2\pi ixy}\delta^{(n-1)}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}=0 \qquad (77)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(n)}(x)dx=2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(n-1)}(x)dx \qquad (78)$$

$\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$ であるから、式(68)から式(79)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(0)}(x)dx=1 \qquad (79)$$

式(78)にn＝1を代入して計算し、式(79)を代入すれば式(80)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(1)}(x)dx=2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(0)}(x)dx=2\pi iy \qquad (80)$$

式(78)にn＝2を代入して計算し、式(80)代入すれば式(81)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(2)}(x)dx=2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(1)}(x)dx=(2\pi iy)^2 \qquad (81)$$

式(80)、式(81)の計算を順次、n＝3､4､5・・・として、行うと式(82)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(n)}(x)dx=(2\pi iy)^n \qquad (82)$$

ディラック関数のn階導関数 $\delta^{(n)}(x)$ のフーリエ変換g(y)は、式(82)を用いて、式(83)のように表される。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\delta^{(n)}(x)dx=(2\pi iy)^n \qquad (83)$$

式(83)はn＝0､1､2､・・・について成り立つ。

（定理１０）
ディラック関数のn階導関数 $\delta^{(n)}(x)$ のフーリエ変換は、関数 $(2\pi iy)^n$ である。

定理１０と定義２を組み合わせると、関数 $(2\pi iy)^n$ のフーリエ逆変換はディラック関数のn階導関数 $\delta^{(n)}(x)$ である。

(10) 関数 x^n のフーリエ変換

[定理１０と定理３を用いた計算]

定理１０と定理３を組み合わせると、関数 $\{2\pi i(-x)\}^n$ のフーリエ変換が $\delta^{(n)}(y)$ であるから、式(84)のように表される。式(84)の右辺が超関数であるから式(84)の左辺は汎関数収束である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}(-2\pi ix)^n dx\overset{han}{=\!=}\delta^{(n)}(y) \qquad (84)$$

式(84)は式(85)のように変形される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}x^n dx=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\delta^{(n)}(y)\overset{han}{=\!=}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\delta^{(n)}(y) \qquad (85)$$

（定理１１）
関数 x^n のフーリエ変換は、超関数 $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\delta^{(n)}(y)$ である。

定理１１と定理２を組み合わせると、超関数$(\frac{i}{2\pi})^n \delta^{(n)}(y)$のフーリエ逆変換は関数$x^n$である。

［定義１を用いた計算］

定義１を直接用いて計算して定理１１を導くこともできる。n=1の場合、式(1)に式(86)を代入すると式(87)が得られる。

$$f(x)=x \tag{86}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}\cdot x\cdot dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} xe^{-2\pi ixy}dx \tag{87}$$

式(87)では積分の下端$-\infty$と上端$+\infty$が対称としている。式(87)は、部分積分を用いて、式(88)のように計算される。

$$\int_{-R}^{+R} xe^{-2\pi ixy}dx=\frac{1}{-2\pi iy}\left[xe^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R}-\frac{1}{-2\pi iy}\int_{-R}^{+R} e^{-2\pi ixy}dx \tag{88}$$

式(16)とおくと、式(88)の右辺の第1項は式(89)のようになる。

$$2\pi R=\frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(16)(再掲)}$$

$$第1項=\frac{1}{-2\pi iy}\{Re^{-2\pi iRy}-(-R)e^{-2\pi i(-R)y}\}=\frac{i}{2\pi}\frac{1}{\pi\varepsilon y}\cos\frac{y}{\varepsilon} \tag{89}$$

式(16)とおき式(71)を代入すると、式(88)の第2項は式(90)のようになる。

$$第2項=-\frac{1}{-2\pi iy}\frac{1}{\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon}=\frac{i}{2\pi}\frac{-1}{\pi y^2}\sin\frac{y}{\varepsilon} \tag{90}$$

式(89)と式(90)を式(88)に代入すると、式(91)のように計算される。

$$\int_{-R}^{+R} xe^{-2\pi ixy}dx=\frac{i}{2\pi}\{\frac{1}{\pi\varepsilon y}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi y^2}\sin\frac{y}{\varepsilon}\} \tag{91}$$

式(91)を式(87)に代入すると式(92)のように計算される。

$$g(y)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{i}{2\pi}(\frac{1}{\pi\varepsilon y}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi y^2}\sin\frac{y}{\varepsilon}) \tag{92}$$

式(92)は収束しないが、式(60)のように汎関数収束するので、式(93)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\frac{1}{\pi\varepsilon y}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi y^2}\sin\frac{y}{\varepsilon}\}\overset{han}{=\!=}\delta'(y) \qquad \text{(60)(再掲)}$$

$$g(y)\overset{han}{=\!=}\frac{i}{2\pi}\delta'(y) \tag{93}$$

式(93)は式(85)でn=1の場合である。

n=2の場合、式(1)に式(94)を代入すると式(95)が得られる。

$$f(x)=x^2 \tag{94}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}\cdot x^2\cdot dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} x^2e^{-2\pi ixy}dx \tag{95}$$

部分積分を用いて、式(96)のように計算される。

$$\int_{-R}^{+R} x^2e^{-2\pi ixy}dx=\frac{i}{2\pi y}\left[x^2e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R}-\frac{i}{\pi y}\int_{-R}^{+R} xe^{-2\pi ixy}dx \tag{96}$$

式(16)とおくと、式(96)の第1項は式(97)のようになる。

$$第1項=\frac{i}{2\pi y}\{R^2e^{-2\pi iRy}-R^2e^{2\pi iRy}\}=(\frac{i}{2\pi})^2(\frac{-1}{\pi\varepsilon^2 y}\sin\frac{y}{\varepsilon}) \tag{97}$$

式(16)とおき式(91)を代入すると、式(96)の第2項は式(98)のようになる。

$$\begin{aligned}第2項&=-\frac{i}{\pi y}\frac{i}{2\pi}(\frac{1}{\pi\varepsilon y}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{-1}{\pi y^2}\sin\frac{y}{\varepsilon})\\&=(\frac{i}{2\pi})^2(-\frac{2}{\pi\varepsilon y^2}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi y^3}\sin\frac{y}{\varepsilon})\end{aligned} \tag{98}$$

式(97)と式(98)を式(96)に代入すると、式(99)のように計算される。

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{+R} x^2e^{-2\pi ixy}dx\\&=(\frac{i}{2\pi})^2(-\frac{2}{\pi\varepsilon y^2}\cos\frac{y}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi\varepsilon^2 y}\sin\frac{y}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi y^3}\sin\frac{y}{\varepsilon})\end{aligned} \tag{99}$$

式(99)を式(95)に代入すると式(100)のように計算される。

$$g(y)=\lim_{R\to+\infty}(\frac{i}{2\pi})^2(-\frac{2}{\pi\varepsilon y^2}\cos\frac{y}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi\varepsilon^2 y}\sin\frac{y}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi y^3}\sin\frac{y}{\varepsilon}) \tag{100}$$

式(100)は収束しないが、式(63)のように汎関数収束するので式(101)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to+0}\{-\frac{2}{\pi\varepsilon y^2}\cos\frac{y}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi\varepsilon^2 y}\sin\frac{y}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi y^3}\sin\frac{y}{\varepsilon}\}\\&\overset{han}{=\!=}\delta''(y)\end{aligned} \qquad \text{(63)(再掲)}$$

$$g(y)\overset{han}{=\!=}(\frac{i}{2\pi})^2\delta''(x) \tag{101}$$

式(101)は式(85)でn=2の場合である。n=3、4、5、・・・として、式(93)、式(101)と同じように計算すれば、式(85)が確かめられる。

(11) 関数$\frac{1}{x}$のフーリエ変換

［準備］

計算の途中で式(102)､式(103)を用いるが、ここでは式(103)は証明せずに定理として用いる。準備として式(102)を証明する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\cos x dx=0 \tag{102}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\sin x dx=\pi \tag{103}$$

式(102)の被積分関数は点x＝0において関数値が存在しないので、極限変数ρを用いて積分区間から点x＝0を除外した式(104)の積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\cos x dx=\lim_{R\to+\infty}\lim_{\rho\to+0}\left(\int_{-R}^{-\rho}\frac{1}{x}\cos x dx+\int_{+\rho}^{+R}\frac{1}{x}\cos x dx\right) \tag{104}$$

式(104)において点x＝0を除外するに当たって、対象な区間$-\rho<x<+\rho$を除外している。式(102)の被積分関数は奇関数であるので、式(105)とおくと式(106)のように計算され、最後に変数uを改めて変数xとおく。

$$-x=u \tag{105}$$

$$\int_{-R}^{-\rho}\frac{1}{x}\cos x dx=\int_{+R}^{+\rho}\frac{1}{-u}\cos(-u)(-du)=\int_{+R}^{+\rho}\frac{1}{u}\cos u du$$
$$=-\int_{+\rho}^{+R}\frac{1}{u}\cos u du=-\int_{+\rho}^{+R}\frac{1}{x}\cos x dx \tag{106}$$

式(106)を式(104)に代入すると式(102)が得られる。

式(1)に式(107)を代入し、式(108)とおくと$x=\frac{u}{2\pi y}$、$dx=\frac{du}{2\pi y}$であり、y＞0のとき、x→－∞がu→－∞に対応し、x→＋∞がu→＋∞に対応するから、式(109)のように計算される。

$$f(x)=\frac{1}{x} \tag{107}$$

$$2\pi xy=u \tag{108}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi y}{u}e^{-iu}\frac{du}{2\pi y}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}e^{-iu}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\cos u du-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\sin u du \tag{109}$$

式(109)に式(102)､式(103)を代入すると、式(110)が得られる。

$$g(y)=-\pi i \tag{110}$$

y＜0のとき、x→－∞がu→＋∞に対応し、x→＋∞がu→－∞に対応するから、式(111)のように計算される。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{2\pi y}{u}e^{-iu}\frac{du}{2\pi y}=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{u}e^{-iu}du$$
$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}e^{-iu}du=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\cos u du+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\sin u du \tag{111}$$

式(111)に式(102)､式(103)を代入すると、式(112)が得られる。

$$g(y)=\pi i \tag{112}$$

式(110)と式(112)は式(113)のように表示され、式(114)のように表示される。

$$g(y)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,y \tag{113}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}dx=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,y \tag{114}$$

式(107)のフーリエ変換は式(113)で表される。式(113)、式(114)には点x＝0を除外した式(104)の積分が用いられていることを意識しておく必要がある。

> （定理１２）
> 関数$\frac{1}{x}$のフーリエ変換は、超関数$-\pi i\,\mathrm{sgn}\,y$である。

定理１２と定義２フーリエ逆変換の定義によれば、超関数$-\pi i\,\mathrm{sgn}\,y$のフーリエ逆変換は関数$\frac{1}{x}$である。

(12) 関数$\frac{1}{x^2}$のと関数$\log|x|$のフーリエ変換

［定義１を用いた計算］

式(1)に式(115)を代入し、式(108)とおくと$x=\frac{u}{2\pi y}$、$dx=\frac{du}{2\pi y}$であり、

y＞0のとき、x→－∞がu→－∞に対応し、x→＋∞がu→＋∞に対応するから、式(116)のように計算される。

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \tag{115}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi y}{u^2}e^{-iu}du$$

$$=2\pi y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\cos u du-2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\sin u du \tag{116}$$

式(116)の第2項の被積分関数は奇関数であるから、点x＝0を除外すれば、式(117)のように収束するが、第1項は収束しないし、汎関数収束もしない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\sin u du=0 \tag{117}$$

y＜0のとき、x→－∞がu→＋∞に対応し、x→＋∞がu→－∞に対応するから、式(118)のように計算される。

$$g(y)=-2\pi y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\cos u du+2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\sin u du \tag{118}$$

式(118)も式(116)と同じように、第2項は収束するが、第1項は収束しない。式(116)、式(118)のいずれについても関数$\frac{1}{x^2}$のフーリエ変換は存在しない。

[注意]

関数$\frac{1}{x^2}$のフーリエ変換は部分積分を用いて式(119)のように計算されるが、式(119)の第1項について極限変数Rを用いて式(120)のように計算されると考えるのは誤りである。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$$

$$=-\left[\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}\right]_{-\infty}^{+\infty}-2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}dx \tag{119}$$

$$第1項=\lim_{R\to+\infty}\left(-\left[\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R}\right)=\lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{R}e^{-2\pi iyR}-\frac{1}{R}e^{2\pi iyR}\right)=0 \tag{120}$$

式(119)は点x＝0において積分不能であるから、積分区間から除外し、第1項について極限変数ρを用いて式(121)のように計算しなければならない。

$$第1項=\lim_{R\to+\infty}\lim_{\rho\to+0}\left(-\left[\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}\right]_{+\rho}^{+R}-\left[\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{-\rho}\right)$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\left(-\frac{2}{\rho}\cos2\pi y\rho\right) \tag{121}$$

式(121)は収束せず、汎関数収束もしない。式(120)と考えると、式(119)のフーリエ変換g(y)が存在し、式(116)、式(118)と矛盾する。

[関数$\frac{1}{x^n}$のフーリエ変換]

式(122)について、部分積分を用いて式(123)のように計算する。

$$f(x)=\frac{1}{x^n}\qquad(n=3、4、5、・・・) \tag{122}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\cdot\frac{1}{x^n}\cdot dx$$

$$=\frac{-1}{n-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}e^{-2\pi ixy}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{-1}{n-1}(2\pi ixy)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}e^{-2\pi ixy}dx \tag{123}$$

n＝3を式(123)に代入すれば、式(116)、式(118)が収束せず、式(123)の第二項が存在しないので、フーリエ変換は存在しないことがわかる。次々に、n＝4､5､6､・・・を式(123)に代入すれば、式(123)の第二項が存在しないので、フーリエ変換は存在しないことがわかる。関数$\frac{1}{x^n}$のフーリエ変換は存在しない。

[関数log|x|のフーリエ変換]

式(124)のフーリエ変換は、部分積分を用いてが式(125)のように計算される。

$$f(x)=\log|x| \tag{124}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\log|x|e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\frac{1}{-2\pi iy}\left[\log|x|e^{-2\pi ixy}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{-2\pi iy}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}dx \tag{125}$$

式(125)の第1項は、R→＋∞になる極限変数Rと積分不能な点x＝0を除外するためのρ→＋0になる極限変数ρを用いて式(126)のように計算される。

$$第1項=\frac{1}{-2\pi iy}\left[\log|x|e^{-2\pi ixy}\right]_{-R}^{+R}$$
$$=\frac{1}{-2\pi iy}\left(\log Re^{-2\pi iyyR}-\log\rho e^{-2\pi iy\rho}+\log\rho e^{2\pi iy\rho}-\log Re^{2\pi iyR}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi y}\left(\log R\cdot\sin 2\pi yR-\log\rho\cdot\sin 2\pi y\rho\right) \tag{126}$$

R→＋∞、ρ→＋0のとき、式(126)は収束しないから、式(125)が収束しないことがわかる。関数log|x|のフーリエ変換は存在しない。

(13) 積分変数と異なる変数による微分

［マクローリン展開］

2変数x、yの関数f(x, y)を変数xについて積分すると式(127)のように変数yだけの関数g(y)になる。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)xdx \tag{127}$$

式(127)の両辺を変数yで微分した式(128)の右辺について、関数f(x, y)がマクローリン展開可能ならば、微分記号と積分記号を入れ替えた式(129)が成り立つ。

$$\frac{d}{dy}g(y)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \tag{128}$$

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx \tag{129}$$

式(129)を証明しよう。関数f(x, y)は式(130)のように表される。

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^{n-k}y^k\left(\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}f\right)(0,0)\right\} \tag{130}$$

式(130)によれば、関数f(x, y)は式(131)の形の項の線形結合として表示できる。

$$f(x,y)=x^iy^j \tag{131}$$

［xとyの冪関数］

式(131)について式(132)に示すように、式(129)が成り立つ。

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}x^iy^jdx=\frac{d}{dy}\left(y^j\int_{-\infty}^{+\infty}x^idx\right)=\left(\frac{d}{dy}y^j\right)\int_{-\infty}^{+\infty}x^idx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dy}y^j\right)x^idx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}x^iy^jdx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx \tag{132}$$

［関数の和］

2つの関数p(x, y)とq(x, y)が式(129)を満足するとき、式(133)の関数f(x, y)は式(134)に示すように、式(129)を満足する。

$$f(x,y)=p(x,y)+q(x,y) \tag{133}$$

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$
$$=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}\{p(x,y)+q(x,y)\}dx=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx+\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}q(x,y)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}p(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}q(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\{p(x,y)+q(x,y)\}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx \tag{134}$$

［関数の定数倍］

関数p(x, y)がが式(129)を満足するとき、式(135)の関数f(x, y)は式(136)に示すように、式(129)を満足する。

$$f(x,y)=ap(x,y) \tag{135}$$

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$
$$=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}\{ap(x,y)\}dx=a\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}p(x,y)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\{ap(x,y)\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx \tag{136}$$

式(130)、式(132)、式(134)、式(136)を組み合わせて考えると、式(129)が成り立つことがわかる。

（定理１３）

関数f(x, y)がマクローリン展開可能ならば、式(129)が成り立つ。

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx \qquad (129)(再掲)$$

［定理１３の適用例］

式(54)の変数xと変数yを入れ替えると式(137)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \delta(y) \qquad (137)$$

式(129)を適用して式(137)の両辺をyで微分すると、式(138)が得られる。

$$-2\pi i\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \delta'(y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \frac{1}{-2\pi i}\delta'(y) = \frac{i}{2\pi}\delta'(y) \qquad (138)$$

式(129)を適用して式(138)の両辺を微分すると式(139)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi ix)\,xe^{-2\pi ixy}dx = -2\pi i\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \frac{i}{2\pi}\delta''(y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \frac{1}{-2\pi i}\,\frac{i}{2\pi}\delta''(y) = \frac{-1}{(2\pi)^2}\,\delta''(y) \qquad (139)$$

式(129)を適用して式(138)、式(139)のように両辺を次々にyで微分すると、n＝0､1､2､・・・について式(140)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^ne^{-2\pi ixy}dx \overset{\text{han}}{=\!=} \frac{i^n}{(2\pi)^n}\,\delta^{(n)}(y) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\frac{d^n}{dy^n}\delta(y) \qquad (140)$$

(14) ヘビサイド関数のフーリエ変換

［準備―――定理１４］

任意の実数a、bを用いて、区間a≦x≦bで関数ϕ(x)が微分可能のとき、$\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)$を微分すれば式(141)が得られるから、式(142)が成り立つ。

$$\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x) = \varepsilon\left\{\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right\}' - \varepsilon\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x) \qquad (141)$$

$$\int_a^b \cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = \varepsilon\left\{\left[\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right]_a^b - \int_a^b \sin\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x)\,dx\right\} \qquad (142)$$

正弦関数が－1と＋1の間の値を取るから、式(142)の右辺の{ }の中は∞になることはなく、$\varepsilon\to+0$とすれば式(143)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b \cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = 0 \qquad (143)$$

式(142)を見ると、関数ϕ(x)が急減少関数であれば、a→－∞、b→＋∞としても式(143)が成り立つことがわかる。

（定理１４）

任意の実数a、bを用いて、区間a≦x≦bで関数ϕ(x)が微分可能のとき、式(143)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b \cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = 0 \qquad (143)(再掲)$$

関数ϕ(x)が急減少関数であれば、a→－∞、b→＋∞としても式(143)が成り立つ。

式(143)でa→－∞、b→＋∞とすれば、式(144)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{y}{\varepsilon}\phi(y)\,dy = 0 \qquad (144)$$

式(144)は式(145)を意味し、式(146)のように表示することができる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = 0 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot\phi(x)\,dx \qquad (145)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\ \cos\frac{x}{\varepsilon} \overset{\text{han}}{=\!=} 0 \qquad (146)$$

［準備―――定理１５］

関数ϕ(x)が急減少関数であるとき、適当に大きな数Gを選んで積分を分割し、式(147)のように計算する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\phi(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)}{y}dy + \int_{-G}^{+G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)}{y}dy - \int_{-G}^{+G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(0)}{y}dy$$

$$+\int_{-G}^{+G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(0)}{y}\,dy+\int_{+G}^{+\infty}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)}{y}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{-G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)}{y}\,dy+\int_{-G}^{+G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)-\phi(0)}{y}\,dy$$

$$+\int_{-G}^{+G}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(0)}{y}\,dy+\int_{+G}^{+\infty}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{\phi(y)}{y}\,dy \qquad (147)$$

式(147)の第1項は区間$-\infty<x<-G$において被積分関数が急減少関数であるから定理１４により0になる。式(147)の第4項は区間$+\infty<x<+G$において被積分関数が急減少関数であるから定理１４により0になる。区間$y\neq0$において$\dfrac{\phi(y)-\phi(0)}{y}$が微分可能関数であり、点$y=0$において導関数$\phi'(0)$になるから微分可能である。$\dfrac{\phi(y)-\phi(0)}{y}$が微分可能関数であるから式(147)の第2項は定理１４により0になる。式(147)の第3項の被積分関数が点$y=0$で積分不能であるから点$y=0$除外して計算する。被積分関数が奇関数であるから式(147)の第3項は0になる。従って、式(147)は0になるから、式(148)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\phi(y)\,dy=0 \qquad (148)$$

> （定理１５）
>
> 関数$\phi(x)$が急減少関数であるとき、式(148)が成り立つ。
>
> $$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\phi(y)\,dy=0 \qquad (148)（再掲）$$

式(148)は式(149)を意味し、式(150)と表示することができる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\,\phi(y)\,dy=0=\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot\phi(y)\,dy \qquad (149)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\overset{\text{han}}{=\!=}0 \qquad (150)$$

［定義１に従って計算］

式(1)に式(151)を代入し、式(16)とおくと$R\to+\infty$のとき$\varepsilon\to+0$だから、式(152)のように計算される。

$$f(x)=\eta(x) \qquad (151)$$

$$2\pi R=\frac{1}{\varepsilon} \qquad (16)（再掲）$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}\eta(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{+R}e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{-2\pi iy}\left[e^{-2\pi ixy}\right]_{0}^{+R}=\lim_{R\to+\infty}\frac{i}{2\pi y}(\cos2\pi Ry-i\sin2\pi Ry-1)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{i}{2\pi y}\cos\frac{y}{\varepsilon}+\frac{1}{2\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon}-\frac{i}{2\pi y}\right) \qquad (152)$$

式(152)について項別に収束を調べる。式(152)の第1項は収束しないが、定理１５により、式(150)のように汎関数収束するので、式(153)が成り立つ。

$$\text{第1項}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{i}{2\pi y}\cos\frac{y}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{\varepsilon}\right)\overset{\text{han}}{=\!=}0 \qquad (153)$$

式(152)の第2項は収束しないが、式(72)のように汎関数収束するので、式(154)が成り立つ。

$$\text{第2項}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi y}\sin\frac{y}{\varepsilon}\right)=\overset{\text{han}}{=\!=}\frac{1}{2}\delta(y) \qquad (154)$$

式(152)の第3項は定数であるから収束する。式(153)と式(154)を式(152)に代入すれば式(155)が得られる。

$$g(y)\overset{\text{han}}{=\!=}\frac{1}{2}\delta(y)-\frac{i}{2\pi y} \qquad (155)$$

> （定理１６）
>
> ヘビサイド関数$\eta(x)$のフーリエ変換は$\dfrac{1}{2}\delta(y)-\dfrac{i}{2\pi y}$である。

［別の方法］

関数$\dfrac{1}{x}$のフーリエ変換の式(114)を用いて、ヘビサイド関数$\eta(x)$のフーリエ変換の式(155)を導くこともできる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-2\pi ixy}dx=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,y \qquad 式(114)（再掲）$$

逆変換を考えて定理２、式(31)を適用すると式(156)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-\pi i\,\mathrm{sgn}\,x)e^{-2\pi ixy}dx=\frac{1}{-y} \qquad (156)$$

式(156)は式(157)に書き換えられる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}x\, e^{-2\pi ixy}dx = \frac{-i}{\pi y} \tag{157}$$

式(158)が成り立つから、式(158)を式(157)に代入すると式(159)が得られる。

$$\mathrm{sgn}x = 2\eta(x)-1 \tag{158}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) e^{-2\pi ixy}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy}dx - \frac{i}{2\pi y} \tag{159}$$

式(159)に式(54)を代入すると式(160)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) e^{-2\pi ixy}dx \overset{\mathrm{han}}{=\!=} \frac{1}{2}\delta(y) - \frac{i}{2\pi y} \tag{160}$$

式(160)は式(155)と同じである。式(54)に汎関数を表示する等号$\overset{\mathrm{han}}{=\!=}$が用いられているから、式(160)にも汎関数を表示する等号$\overset{\mathrm{han}}{=\!=}$が用いられる。

(15) 正弦関数のフーリエ変換

[定義１に従って計算]

式(1)に式(161)を代入して極限変数Rを用いて式(162)のように計算される。

$$f(x) = \sin 2\pi kx \tag{161}$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin 2\pi kx) e^{-2\pi ixy}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} (\sin 2\pi kx) e^{-2\pi ixy}dx \tag{162}$$

式(162)では－∞と＋∞が対称である。式(162)の被積分関数は式(163)のように計算される。

$$\begin{aligned}(\sin 2\pi kx) e^{-2\pi ixy} &= \sin 2\pi kx\cdot\cos 2\pi xy - i\cdot\sin 2\pi kx\cdot\sin 2\pi xy \\ &= \frac{1}{2}\{\sin 2\pi(k+y)x + \sin 2\pi(k-y)x\} \\ &\quad + \frac{i}{2}\{\cos 2\pi(k+y)x - \cos 2\pi(k-y)x\} \\ &= \frac{1}{2}\{\sin 2\pi(y+k)x - \sin 2\pi(y-k)x\} \\ &\quad + \frac{i}{2}\{\cos 2\pi(y+k)x - \cos 2\pi(y-k)x\} \end{aligned} \tag{163}$$

式(163)を式(162)に代入して式(164)のように計算する。

$$\begin{aligned} g(y) &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\{\frac{1}{2}\sin 2\pi(y+k)x - \frac{1}{2}\sin 2\pi(y-k)x \\ &\quad + \frac{i}{2}\cos 2\pi(y+k)x - \frac{i}{2}\cos 2\pi(y-k)x\}dx \\ &= \lim_{R\to+\infty}\{\frac{1}{2}\frac{-1}{2\pi(y+k)}[\cos 2\pi(y+k)x]_{-R}^{+R} \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{-1}{2\pi(y-k)}[\cos 2\pi(y-k)x]_{-R}^{+R} \\ &\quad + \frac{i}{2}\frac{1}{2\pi(y+k)}[\sin 2\pi(y+k)x]_{-R}^{+R} \\ &\quad - \frac{i}{2}\frac{1}{2\pi(y-k)}[\sin 2\pi(y-k)x]_{-R}^{+R}\} \\ &= \lim_{R\to+\infty}\{\frac{i}{2}\frac{1}{\pi(y+k)}\sin 2\pi(y+k)R \\ &\quad - \frac{i}{2}\frac{1}{\pi(y-k)}\sin 2\pi(y-k)R\} \end{aligned} \tag{164}$$

式(16)とおくと、R→＋∞のときε→＋0だから、式(164)は式(165)のように書き換えられる。

$$2\pi R = \frac{1}{\varepsilon} \tag{16)(再掲}$$

$$g(y) = \lim_{\varepsilon\to+0}\{\frac{i}{2}\frac{1}{\pi(k+y)}\sin\frac{y+k}{\varepsilon} - \frac{i}{2}\frac{1}{\pi(k-y)}\sin\frac{y-k}{\varepsilon}\} \tag{165}$$

式(165)の右辺は収束しないので、関数g(y)は存在しない。しかし、式(165)の右辺を調べると、各項は式(50)の左辺のxをy＋kやy－kで置き換えた形を含んでいるから、式(166)が得られる。

$$g(y) \overset{\mathrm{han}}{=\!=} \frac{i}{2}\delta(y+k) - \frac{i}{2}\delta(y-k) \tag{166}$$

関数sin2πkxのフーリエ変換は式(166)で表される。

> 定理１７
>
> 関数sin2πkxのフーリエ変換は$\frac{i}{2}\delta(y+k) - \frac{i}{2}\delta(y-k)$である。

(16) 余弦関数のフーリエ変換

[定義１に従って計算]

式(1)に式(167)を代入して、極限変数Rを用いて式(168)のように計算される。

$$f(x)=\cos 2\pi kx \tag{167}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos 2\pi kx)e^{-2\pi ixy}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}(\cos 2\pi kx)e^{-2\pi ixy}dx \tag{168}$$

式(168)の被積分関数は式(169)のように計算される。

$$\begin{aligned}(\cos 2\pi kx)e^{-2\pi ixy}&=\cos 2\pi kx\cdot\cos 2\pi xy-i\cdot\cos 2\pi kx\cdot\sin 2\pi xy\\&=\cos 2\pi xy\cdot\cos 2\pi kx-i\cdot\sin 2\pi xy\cdot\cos 2\pi kx\\&=\frac{1}{2}\{\cos 2\pi(y+k)x+\cos 2\pi(y-k)x\}\\&\quad-\frac{i}{2}\{\sin 2\pi(y+k)x+\sin 2\pi(y-k)x\}\end{aligned} \tag{169}$$

式(169)を式(168)に代入して式(170)のように計算する。

$$\begin{aligned}g(y)&=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\{\frac{1}{2}\cos 2\pi(y+k)x+\frac{1}{2}\cos 2\pi(y-k)x\\&\qquad-\frac{i}{2}\sin 2\pi(y+k)x-\frac{i}{2}\sin 2\pi(y-k)x\}dx\\&=\lim_{R\to+\infty}\{\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi(y+k)}[\sin 2\pi(y+k)x]_{-R}^{+R}\\&\qquad+\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi(y-k)}[\sin 2\pi(y-k)x]_{-R}^{+R}\\&\qquad-\frac{i}{2}\frac{-1}{2\pi(y+k)}[\cos 2\pi(y+k)x]_{-R}^{+R}\\&\qquad-\frac{i}{2}\frac{-1}{2\pi(y-k)}[\cos 2\pi(y-k)x]_{-R}^{+R}\}\\&=\lim_{R\to+\infty}\{\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(y+k)}\sin 2\pi(y+k)R\\&\qquad+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(y-k)}\sin 2\pi(y-k)R\}\end{aligned} \tag{170}$$

式(16)とおくと、R→＋∞のときε→＋0だから、式(170)は式(171)のように書き換えられる。

$$2\pi R=\frac{1}{\varepsilon} \tag*{(16)(再掲)}$$

$$g(y)=\lim_{\varepsilon\to+0}\{\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(y+k)}\sin\frac{y+k}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(y-k)}\sin\frac{y-k}{\varepsilon}\} \tag{171}$$

式(171)は収束しないので、関数g(y)は存在しない。しかし、式(171)の右辺を調べると、各項は式(50)の左辺のxをy＋kやy−kで置き換えた形を含んでいるから、式(172)が得られる。

$$g(y)\overset{\text{han}}{=\!=}\frac{1}{2}\delta(y+k)+\frac{1}{2}\delta(y-k) \tag{172}$$

関数cos2πkxのフーリエ変換は式(172)で表される。

> 定理１８
>
> 関数cos2πkxのフーリエ変換g(y)は$\frac{1}{2}\delta(y+k)+\frac{1}{2}\delta(y-k)$である。

[定理９と定理１８の関係]

k＝0のときcos2πkx＝cos0＝1となり、関数値1の定数関数である。関数値1の定数関数のフーリエ変換は式(74)のようにディラック関数δ(y)である。式(172)でk＝0とすればディラック関数δ(y)が得られる。

(17) 波形解析

[位相表示の正弦関数のフーリエ変換]

正弦関数の一般形は式(173)で表され、振幅Aと位相2πnと周波数kによって特徴付けられる。

$$f(x)=A\sin(2\pi kx+2\pi n) \tag{173}$$

数値nについては式(174)の範囲で考えれば十分である。

$$0\leqq n<1 \tag{174}$$

n＝0、A＝1のとき式(173)は式(161)と一致し、n＝$\frac{1}{4}$、A＝1のとき式(173)は式(167)と一致する。式(173)は式(175)のように変形される。

$$f(x)=A\cos 2\pi n\sin 2\pi kx+A\sin 2\pi n\cos 2\pi kx \tag{175}$$

定理１７、定理１８を用いると、式(175)のフーリエ変換g(y)は式(176)

のようになる。

$$g(y)\overset{\text{han}}{=\!=}\frac{i}{2}A\cos2\pi n\{\delta(y+k)-\delta(y-k)\}$$
$$+\frac{1}{2}A\sin2\pi n\{\delta(y+k)+\delta(y-k)\} \qquad (176)$$

式(173)のフーリエ変換g(y)は式(176)で表される。

[周波数分析]

式(173)と式(176)の関係を用いると、地震波のような複数の正弦波が重なり合った波形から、個別の正弦波の周波数を見つけ出すことができる。観測で得られた地震波形を時刻xの関数p(x)として記録する。時刻xの単位は秒、関数p(x)の単位はmmである。関数p(x)は式(177)のように複数の式(173)の関数f(x)が重なり合っている。

$$p(x)=\Sigma f(x) \qquad (177)$$

地震の継続時間を2Rとしてx＝－Rからx＝＋Rまで地震が継続していたとして地震波形p(x)のフーリエ変換q(y)を求める。継続時間を時刻x＝0に関して対称に設定するのは、式(44)、式(45)で論じた対称性を考慮している。関数f(x)のフーリエ変換をg(y)として定理４を用いれば地震波形p(x)のフーリエ変換q(y)は式(178)のようになる。

$$q(y)=\Sigma g(y) \qquad (178)$$

関数f(x)のx＝－Rからx＝＋Rまでのフーリエ変換g(y)は式(179)のように計算される。

$$g(y)=\frac{i}{2}A\cos2\pi n\{\frac{\sin2\pi(y+k)R}{\pi(y+k)}-\frac{\sin2\pi(y-k)R}{\pi(y-k)}\}$$
$$+\frac{1}{2}A\sin2\pi n\{\frac{\sin2\pi(y+k)R}{\pi(y+k)}+\frac{\sin2\pi(y-k)R}{\pi(y-k)}\} \qquad (179)$$

変数yの単位は回/秒、関数g(y)の単位はmmである。R→＋∞のとき、式(179)のg(y)→式(176)のg(y)であるから、Rが十分に大きければ式(179)のg(y)は点y＝0に関して対象なy＝－kとy＝＋kの位置にディラック関数が示唆する顕著な極値を生じる。1995年1月17日に発生した兵庫県南部地震は約15秒間、2011年3月11日に発生した東北地方太平洋沖地震は約190秒間継続し、地震が一旦収まった。地震の継続時間2Rが15秒や190秒程度であれば、Rが十分に大きいと考えて良い。

観測で得られた地震波形p(x)について、台形公式やシンプソンの公式を用いた数値積分によって、フーリエ変換q(y)を求める。関数q(y)を虚数部分s(y)と実数部分r(y)に式(180)のように分ける。

$$q(y)=is(y)+r(y) \qquad (180)$$

虚数部分s(y)と実数部分r(y)を図示すれば、ディラック関数が示唆する顕著な極値が複数見つかる。極値に対応する複数の周波数kを読み取る。式(177)が示す複数のf(x)に対応するkである。

[振幅Aと位相2πnを計算する]

適当に小さい数値ρと式(180)のs(y)、r(y)を用いると、周波数kの1つの値に対して式(181)、式(182)、式(183)、式(184)が得られる。

$$A\cos2\pi n=2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}s(y)dy \qquad (181)$$

$$A\cos2\pi n=-2\int_{k-\rho}^{k+\rho}s(y)dy \qquad (182)$$

$$A\sin2\pi n=2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}r(y)dy \qquad (183)$$

$$A\sin2\pi n=2\int_{k-\rho}^{k+\rho}r(y)dy \qquad (184)$$

隣接したkについて、区間－k－ρ≦y≦－k＋ρが重ならなければ、数値ρが適当に小さいと考えて良い。このとき、区間k－ρ≦y≦k＋ρも重ならない。式(181)と式(182)は理論的には等しいが、測定や計算の誤差のために、完全には等しくない。式(181)と式(182)の差が測定や計算の精度の目安になる。式(183)と式(184)の右辺についても同じである。式(181)と式(183)から式(185)、式(186)が得られ、振幅Aと位相2πnが求められる。

$$(2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}s(y)dy)^2+(2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}r(y)dy)^2=A^2 \qquad (185)$$

$$\frac{2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}r(y)dy}{2\int_{-k-\rho}^{-k+\rho}s(y)dy}=\tan2\pi n \qquad (186)$$

式(182)と式(184)から式(187)、式(188)が得られ、振幅Aと位相2πnが求められる。

$$\left(2\int_{k-\rho}^{k+\rho} s(y)\,dy\right)^2+\left(2\int_{k-\rho}^{k+\rho} r(y)\,dy\right)^2=A^2 \tag{187}$$

$$\frac{2\int_{k-\rho}^{k+\rho} r(y)\,dy}{2\int_{k-\rho}^{k+\rho} s(y)\,dy}=\tan 2\pi n \tag{188}$$

式(185)と式(187)は理論的には等しいが、測定や計算の誤差のために、完全には等しくない。式(186)と式(188)についても同じである。