［質問］　超関数と分布

2018年12月24日
小林　保

１．関数と汎関数

　数値xを定めるとそれに応じて数値yが定まるような規則がある場合にyはxの関数であると言い、式(1)のように表す。

$$y=f(x) \qquad (1)$$

式(1)では文字fが関数を表している。関数$\phi(x)$を定めるとそれに応じて数値vが定まるような規則がある場合にvは$\phi(x)$の汎関数であると言い、式(2)のように表す。

$$v=\tau(\phi) \qquad (2)$$

式(2)では文字τが汎関数を表している。
　先に数値xや関数$\phi(x)$を定めるから、数値xや関数$\phi(x)$は入力要素であり、それに応じて数値yや数値vが定まるから、数値yや数値vは出力要素である。関数と汎関数の出力要素は数値で同じであるが、関数の入力要素は数値であり、汎関数の入力要素は関数であり、異なっている。汎関数と関数は同型の記号を用いる。関数の記号は入力要素xを括弧（ ）で包んで文字fに付属させる。汎関数の記号は入力要素ϕを括弧（ ）で包んで文字τに付属させる。

２．分布と関数

　分布は分布の場と分布する量の対応関係で表される。例えば、空間内の多くの点について、点Pの温度Tが測定されたとき、点Pと温度Tの対応関係が温度の分布である。座標を用いて各点を表すことができる。一次元空間の場合、点Pは座標xで表され、点Pと温度Tの対応関係を座標xと温度Tの対応関係に置き換えることができ、式(3)の関数fを用いて表すことができる。

$$T=f(x) \qquad (3)$$

三次元空間の場合、点Pは座標(x,y,z)で表され、点Pと温度Tの対応関係を座標(x,y,z)と温度Tの対応関係に置き換えることができ、式(4)の3変数関数fを用いて表すことができる。

$$T=f(x,y,z) \qquad (4)$$

　温度の分布の例については、点Pの集合が分布の場、温度Tの数値が分布する量である。式(3)や式(4)の関数が分布を表す。

３．Schwarzの超関数の理論

　Schwarzの超関数の理論に関する著作の表題は「Théorie des Distributions」[1]であり、「超関数」を「分布」と捉えているらしい。Schwarzの理論において、超関数f(x)は汎関数$\tau(\phi)$を用いて説明される。式(5)の左辺の関数$\phi(x)$以外の部分が関数$\phi(x)$に作用して、右辺の数値$\tau(\phi)$を生成するとき、左辺のf(x)が超関数である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\phi(x)\,dx=\tau(\phi) \qquad (5)$$

式(5)は入力要素が関数$\phi(x)$、出力要素が数値$\tau(\phi)$の汎関数であり、汎関数$\tau(\phi)$の性質を介して超関数f(x)の性質を説明する。汎関数$\tau(\phi)$の周辺を見ても、分布の場や分布する量が見当たらない。汎関数の性質を介して超関数と分布の関係を理解することはできない。

４．倍率の分布

　超関数を「分布」と捉える事情について次のように説明[2]する人がいる。式(5)は倍率の「分布」f(x)を設定して、入力関数$\phi(x)$に重ね合わせることで、倍率の分布に応じた値を関数から取り出しているような感じであるから、f(x)を分布と呼ぶのがふさわしい。
　この説明には納得できない。f(x)は「倍率の分布」である。言葉を短くする必要があって省略するならば「倍率」とすべきである。式(5)は「倍率」の分布f(x)を設定して、・・・、f(x)を倍率と呼ぶのがふさわしい、とすべきである。式(5)の左辺のf(x)を分布と呼ぶのはふさわしくない。

５．成分表示型の超関数

　独立変数xと近似変数εを含む近似関数F(x)と点径変数ρを用いて、超関数f(x)の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・を式(6)～式(9)で計算する。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho) \qquad (6)$$

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{F(x+\rho)-F(x-\rho)\} \qquad (7)$$

$$f_1(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t)\,dt \qquad (8)$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1}F(t)\,dt \qquad (9)$$

・・・・・・・・・・・・・・・

成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・を点 , で区切って並べ、括弧｛ ｝で包んで、ベクトルと同じ表現で、超関数f(x)を式(10)で表す。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),\cdots,f_n(x),\cdots\} \qquad (10)$$

式(10)の表現を用いると、一次元で単位kg/mの質量密度の分布を成分$f_h(x)$が表し、単位kgの質量の分布を$f_1(x)$が表し、統一的に表現することができる。座標xが分布の場、式(10)の超関数f(x)が分布する量に相当し、式(3)と同じように分布を表すから、式(6)～式(9)、式(10)を分布の理論と呼ぶのがふさわしい。

６．日本語訳

　Schwarzの超関数の理論に関する著作が日本語に翻訳されたとき、「Distributions」を「分布」とせずに「超関数」としたことは良かったと思う。その後、佐藤が超関数の理論を作ったとき、英語訳の用語「Hyperfunction」を用いることに繋がった。

７．質問

　上記３．のように、汎関数の性質を介して超関数と分布の関係を理解することはできない。どのように考えて、Schwarzの理論が超関数と分布を関連付けるのか教えてください。
　上記４．のような考えであれば、どうして「倍率分布の理論」または「倍率の理論」としなかったのか教えてください。
　筆者は「分布の理論」と呼ぶのがふさわしい理論を探し求め、上記５．を見出した。

引用文献

1) 超関数の理論、岩村聯他2名訳、1971/9/30、岩波書店、の訳者のまえがきの記述
2) http://eman-physics.net/math/fourier07.html、2018/3/24閲覧、の上から4つめの項目「超関数とは何か」の記述