ディラック関数の性質

2018年12月23日

小林　保

(1) 定義

適当に小さい正の補助変数εを含む関数$\Delta(x)$が、任意の急減少関数$\phi(x)$を用いて、式(1)を満足するとき、関数$\Delta(x)$がディラック関数$\delta(x)$を定義すると言う。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{1}$$

変数εを近似変数、関数$\Delta(x)$を近似関数と言う。ディラック関数$\delta(x)$を用いて、式(1)を式(2)のように略記するのが良いと思われる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{2}$$

(2) 区間における積分

2つの実数a、bがa＜bであるとき、関数$\psi(x)$を式(3)、式(4)で定義する。

$$\psi(x)=\phi(x)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{(x-a)^2}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{(x-b)^2}\right)\qquad (a<x<b) \tag{3}$$

$$\psi(x)=0\qquad (x\leqq a,\ b\leqq x) \tag{4}$$

式(3)の関数$\psi(x)$は式(5)、式(6)を満足するから、2点x＝a、x＝bにおいて式(4)と滑らかに接続し、式(3)、式(4)の関数$\psi(x)$は急減少関数である。

$$\lim_{x\to a+0}\psi(x)=0 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to b-0}\psi(x)=0 \tag{6}$$

式(3)、式(4)の関数$\psi(x)$は式(7)、式(8)を満足する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(x)=\phi(x)\qquad (a<x<b) \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(x)=0\qquad (x<a,\ b<x) \tag{8}$$

式(1)の積分の区間a＜x＜bにおける積分は関数$\psi(x)$を用いて式(9)のように表すことができる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\psi(x)\,dx \tag{9}$$

(3) 点x＝0における性質

2つの実数a、bが式(10)であるとき、式(7)から式(11)が成り立つ。

$$a<0<b \tag{10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(0)=\phi(0) \tag{11}$$

式(1)を式(9)の右辺に適用し、式(11)を代入すると、式(12)が得られるから、式(13)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\psi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(0)=\phi(0) \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{13}$$

適当に小さな正の数ρを用い、a＝$-\rho$、b＝$+\rho$ とおき、$\rho\to 0$とすると式(13)から式(14)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{14}$$

ディラック関数$\delta(x)$を用いて、式(14)を式(15)のように略記するのが良いと思われる。

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{15}$$

式(14)の積分区間$-\rho<x<+\rho$ は$\rho\to 0$のとき区間$-0<x<+0$と同じであり、点x＝0と同じである。変数ρは点の半径であるから、点径変数と呼ぶことを提案する。ディラック関数$\delta(x)$を含む場合には、点x＝0における積分が0でない値を持つ場合があることを式(15)は意味している。

(4) 点x≠0における性質

2つの実数a、bが式(16)であるとき、式(8)から式(17)が成り立つ。

$$0<a<b \tag{16}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{\psi}(0)=0 \tag{17}$$

式(1)を式(9)の右辺に適用し、式(17)を代入すると、式(18)が得られるから、式(19)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\boldsymbol{\psi}(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{\psi}(0)=0 \tag{18}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \quad (0<a<b) \tag{19}$$

式(16)を守っていれば、a→+0、b→+∞としても式(19)は成り立つから式(20)が成り立つ。

$$\lim_{a\to +0}\lim_{b\to +\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{20}$$

2つの実数a、bが式(21)であるとき、式(16)～式(19)と同様に推論して式(22)が成り立つ。

$$a<b<0 \tag{21}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \qquad (a<b<0) \tag{22}$$

式(21)を守っていれば、a→-∞、b→-0としても式(22)は成り立つから式(23)が成り立つ。

$$\lim_{a\to -\infty}\lim_{b\to -0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b}\Delta(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{23}$$

ディラック関数$\boldsymbol{\delta}$(x)を用いて、式(20)を式(24)のように、式(23)を式(25)のように略記するのが良いと思われる。

$$\int_{+0}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{-0}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{25}$$

式(19)、式(23)は各点収束の式(26)を意味しないことに注意すべきである。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(x)=0 \qquad (a<x<b) \qquad (\text{不成立}) \tag{26}$$

式(27)の関数Δ(x)は式(19)、式(22)を満足するが、式(26)を満足しない。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\boldsymbol{\pi}x}\sin\left(\frac{x}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{27}$$

ディラック関数$\boldsymbol{\delta}$(x)について式(28)のように略記することも避けた方が無難である。

$$\boldsymbol{\delta}(x)=0 \qquad (a<x<b) \qquad (\text{不適切}) \tag{28}$$

(5) 積分区間についての注意

2つの実数a、bの場合分けは式(10)、式(16)、式(21)の3つであり、a＝0やb＝0は含まれていないから、式(13)、(19)、式(22)で積分の端点に0を用いてはいけない。式(24)を式(29)のように、式(25)を式(30)のように略記すると積分の分割の式(31)が成り立たず、不都合が起こる。

$$\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx \tag{31}$$

式(29)と式(30)を式(31)に代入すると式(32)が得られ、式(2)と矛盾する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx=0 \qquad (\text{不成立}) \tag{32}$$

積分の分割の式(33)は積分の端点に0を用いずに-0や+0を用いており、成立する。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx\\ &=\int_{-\infty}^{-0}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx+\int_{-0}^{+0}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx+\int_{+0}^{+\infty}\boldsymbol{\delta}(x)\,\boldsymbol{\phi}(x)\,dx\end{aligned} \tag{33}$$

式(24)と式(15)と式(25)を式(33)に代入すると、式(2)と一致する。