標本化関数によるディラック関数の近似

2018年12月06日
小林　保

(1) 標本化関数

近似変数εを含む式(1)の関数$\Delta(x)$は標本化関数である。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{1}$$

任意の急減少関数$\phi(x)$を用いて、関数$\Delta(x)$が式(2)を満足するとき、関数$\Delta(x)$がディラック関数$\delta(x)$を近似すると言う。式(2)の証明を試みる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx = \phi(0) \tag{2}$$

(2) 技巧

任意の正の実数ρを用いて、式(2)の右辺の積分について式(3)のように計算する。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx - \phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx + \phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-\rho}\Delta(x)\phi(x)\,dx + \int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}\,dx \\
&\quad + \int_{+\rho}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx + \phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx
\end{aligned} \tag{3}$$

第2辺の第2項と第3項は絶対値が同じで符号の異なる値である。第3辺の第1項、第2項、第3項は計算すると0になるので、第4項のみが残る。第3辺の第4項が第1辺と同じになるように第2辺の計算を行っており、技巧的である。

(3) 準備 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = 0$

任意の実数a、bを用いて、区間$a \leqq x \leqq b$で関数$\phi(x)$が微分可能のとき、$\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)$を微分すれば式(4)が得られるから、式(5)が成り立つ。

$$\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x) = -\varepsilon\left\{\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right\}' + \varepsilon\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx \\
&= \varepsilon\left\{-\left[\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right]_a^b + \int_a^b \cos\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x)\,dx\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

余弦関数が-1と+1の間の値を取るから、式(5)の右辺の{ }の中は∞になることはなく、$\varepsilon\to 0$とすれば式(6)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx = 0 \tag{6}$$

式(5)を見ると、関数$\phi(x)$が急減少関数であれば、$a\to-\infty$、$b\to+\infty$としても式(6)が成り立つことがわかる。

(4) 第3辺の第1項の計算

式(3)の第3辺の第1項について式(7)のように計算する。

$$\int_{-\infty}^{-\rho}\Delta(x)\phi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\rho}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\phi(x)}{x}\,dx \tag{7}$$

関数$\frac{\phi(x)}{x}$が点$x=0$を除いて急減少関数であるから、式(7)の右辺は式(6)で$a\to-\infty$、$b=-\rho$とした場合に相当し、式(8)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\rho}\Delta(x)\phi(x)\,dx = 0 \tag{8}$$

式(3)の第3辺の第3項について、同様にして、式(9)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{+\rho}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx = 0 \tag{9}$$

(5) 第3辺の第2項の計算

式(3)の第3辺の第2項について式(10)のように計算する。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,dx
\end{aligned} \tag{10}$$

関数$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$は$x\neq 0$で微分可能であり、$x\to 0$のとき$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\to\phi'(x)$となるから、$x=0$においても微分可能であり、区間$a\leqq x\leqq b$で微分可能である。式(10)の右辺は式(6)で$a=-\rho$、$b=+\rho$とした場合に相当し、式(11)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}\,dx = 0 \tag{11}$$

(6) 準備 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

複素平面$z=x+iy$の上で、点$x=r$からx軸上を通って点$x=R$に到る直線、点$x=R$から上半平面を通って点$x=-R$に到る半径Rの半円、点$x=-R$からx軸上を通って点$x=-r$に到る直線、点$x=-r$から上半平面を通って点$x=r$に到る半径rの半円を連ねた閉曲線を考える。閉曲線の内部で関数$\frac{e^{iz}}{z}$が正則であるから、関数$\frac{e^{iz}}{z}$を閉曲線に沿って積分すると0になる。閉曲線の部分ごとに積分して足し算し、$r\to 0$、$R\to+\infty$すれば、式(12)が得られる。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

(7) 第3辺の第4項の計算

式(3)の第3辺の第4項について、被積分関数が偶関数であることを考慮して、式(13)のように計算する。

$$\begin{aligned}
&\phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx = \phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \\
&= \frac{2\phi(0)}{\pi}\int_0^{+\rho}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx
\end{aligned} \tag{13}$$

式(14)とおくと$dx=\varepsilon\,dt$、$x=0$のとき$t=0$、$\varepsilon\to 0$を考慮して$x=+\rho$のとき$t\to+\infty$になるから、式(15)のように計算される。

$$\frac{x}{\varepsilon} = t \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(0)\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx = \frac{2\phi(0)}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \\
&= \phi(0)
\end{aligned} \tag{15}$$

(8) 式(2)の証明

式(3)で$\varepsilon\to 0$とし、式(8)、式(9)、式(11)、式(15)を代入すれば、式(2)が成り立つことがわかる。