［質問］　区間x≠0における標本化関数の状態

2018年9月26日

小林　保

(1)　区間x≠0におけるディラック関数

　ディラック関数$\boldsymbol{\delta}$(x)は式(1)を満足する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\phi(x)\,dx = \phi(0) \qquad (1)$$

式(1)は任意の急減少関数ϕ(x)に対して成り立つので、関数ϕ(x)が式(2)の性質を併せ持つ場合を考える。

$$\phi(x) = 0 \quad (x \leqq 0) \qquad (2)$$

式(2)で$\phi(0)=0$であることを意識して、式(2)の関数ϕ(x)を式(1)に代入すれば、式(3)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\phi(x)\,dx = 0 \qquad (3)$$

式(2)を意識して区間x≦0で積分すれば、明らかに式(4)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{0} \delta(x)\,\phi(x)\,dx = 0 \qquad (4)$$

式(3)と式(4)から式(5)が得られる。

$$\int_{0}^{+\infty} \delta(x)\,\phi(x)\,dx = 0 \qquad (5)$$

急減少関数ϕ(x)は区間0＜xにおいては任意の変動をするから、式(5)から式(6)が導かれる。

$$\delta(x) = 0 \quad (0 < x) \qquad (6)$$

式(2)の区間x≦0を区間0≦xに換えて、式(2)～式(6)と同じように推論し、式(6)と併せれば式(7)が得られる。

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \qquad (7)$$

(2)　標本化関数

　補助変数εを含む式(8)の関数$\mathit{\Delta}$(x)は標本化関数であり、$\varepsilon\to 0$のときディラック関数δ(x)を近似することは、引用文献を記載するには及ばないほどに、多くの教科書に記述されている。

$$\mathit{\Delta}(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad (8)$$

ディラック関数δ(x)は式(7)を満足する。式(8)の関数$\mathit{\Delta}$(x)が近似するディラック関数δ(x)も式(7)を満足するから、式(9)が成り立つはずである。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \quad (x \neq 0) \qquad (9)$$

(3)　式(9)は不成立

　x≠0の1例としてx＝1を考える。式(8)にx＝1を代入すると式(10)が得られる。

$$\mathit{\Delta}(1) = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (10)$$

式(10)で変数$\varepsilon\to 0$としても値$\mathit{\Delta}$(1)は式(11)の範囲で振動し、収束しない。

$$-\frac{1}{\pi} \leqq \lim_{\varepsilon\to 0}\mathit{\Delta}(1) \leqq +\frac{1}{\pi} \qquad (11)$$

式(11)は式(9)の反例である。式(9)が成り立たないとすると、式(8)の関数$\mathit{\Delta}$(x)が近似するディラック関数δ(x)が式(7)を満足しないことになり、式(8)の関数$\mathit{\Delta}$(x)はディラック関数δ(t)の近似関数としてふさわしくない。

(4)　質問

　多くの教科書が誤っているとは思えない。式(1)から式(7)を導く推論、式(11)が式(9)の反例であるとの推論のどこかに誤りがある。どこが誤りであるか教えてください。式(9)を証明する方法を教えてください。