［質問］　標本化関数によるディラック関数の近似における循環論法

2018年9月24日

小林　保

(1)　フーリエ変換と逆変換

関数f(x)と関数g(y)が式(1)を満足するとき、関数g(y)を関数f(x)のフーリエ変換と言う。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ixy}f(x)dx \tag{1}$$

式(1)が成り立つとき、式(2)が成り立つ。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ixy}g(y)dy \tag{2}$$

式(2)で関数f(x)を関数g(y)のフーリエ逆変換と言う。

(2)　標本化関数によるディラック関数の近似

ディラック関数$\delta(x)$は式(3)で近似して表すことができる。

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x} \tag{3}$$

式(3)の右辺は標本化関数である。

(3)　式(3)を用いて式(1)から式(2)を導く

式(1)の変数xをtに変えて式(4)のように書き換える。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ity}f(t)dt \tag{4}$$

式(4)を式(2)に代入して式(5)のように計算する。

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ixy}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ity}f(t)dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ixy}\cdot e^{-2\pi ity}f(t)dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(x-t)y}f(t)dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(x-t)y}f(t)dy\right)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(x-t)y}dy\right)dt\end{aligned} \tag{5}$$

式(5)の第2辺の$e^{2\pi ixy}$は変数tに関して定数だから内側の積分記号と順序を交換して第3辺として良い。変数tと変数yの積分順序を変更して良いので、第4辺から第5辺が得られる。関数f(t)は変数yに関して定数だから内側の積分記号と順序を交換して第6辺として良い。式(5)の第6辺の内側の積分を式(6)のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(x-t)y}dy&=\lim_{n\to\infty}\int_{-n/2\pi}^{+n/2\pi}e^{2\pi i(x-t)y}dy\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i(x-t)}\left[e^{2\pi i(x-t)y}\right]_{-n/2\pi}^{+n/2\pi}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\{n(x-t)\}}{\pi(x-t)}\end{aligned} \tag{6}$$

式(3)のxにx-tを代入して式(7)が得られる。

$$\delta(x-t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\{n(x-t)\}}{\pi(x-t)} \tag{7}$$

式(7)を式(6)に代入し、式(6)を式(5)に代入すると、式(8)のように計算され、式(1)が成り立つとき、式(2)が成り立つことを確認できる。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-t)f(t)dt=f(x) \tag{8}$$

(4)　式(1)と式(2)から式(3)を導く

式(9)が成り立つから、式(1)で式(10)とおくと式(1)は式(11)のように書き換えられる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)dx=\phi(0) \tag{9}$$

$$f(x)=\delta(x) \tag{10}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-2\pi ixy}dx=e^{0}=1 \tag{11}$$

式(2)に式(10)と式(11)を代入すると式(12)のように計算され、式(3)が得られる。

$$\begin{aligned}\delta(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ixy}dy=\frac{1}{2\pi ix}\left[e^{2\pi ixy}\right]_{-\infty}^{+\infty}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi ix}\left[e^{2\pi ixy}\right]_{-n/2\pi}^{+n/2\pi}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi ix}\left(e^{ixn}-e^{-ixn}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x}\end{aligned} \tag{12}$$

(5)　循環論法

式(1)と式(2)の両立を証明するときに上記(3)のように式(3)を前提にし、式(3)を証明するときに上記(4)のように式(1)と式(2)の両立を前提にするのは循環論法である。循環論法に陥っては数学的とはいえない。

(6)　質問

式(1)と式(2)の両立を前提にせずに式(3)を証明する方法を教えてください。