# 超関数1の無限積分

2018年3月20日
小林　保

## (1) 超関数1

近似関数I(x)が急減少関数$\phi$(x)を用いて式(1)を満足するとき、近似関数I(x)が超関数i(x)を定義する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,dx \qquad (1)$$

超関数i(x)は式(2)の右辺の定数関数1と同じであると考えられるから、超関数i(x)を超関数1と呼ぶのが相応しい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\phi(x)\,dx \qquad (2)$$

## (2) 緩増加な近似関数

式(3)の関数I(x)は普通の定数関数であり、式(1)で定義される超関数i(x)の近似関数の1つである。

$$I(x)=1 \qquad (3)$$

式(3)の関数I(x)は緩増加関数であり、その無限積分は式(4)のように発散する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\,dx=\lim_{R\to 0}\int_{-R}^{+R}1\cdot dx=\lim_{R\to 0}\left[x\right]_{-R}^{+R}$$
$$=\lim_{R\to 0}2R=+\infty \qquad (4)$$

## (3) 急減少な近似関数

式(5)の関数I(x)は近似変数$\varepsilon$を含み、式(1)で定義される超関数i(x)の近似関数の1つである。

$$I(x)=\exp(-\varepsilon^2x^2) \qquad (5)$$

式(5)の関数I(x)は急減少関数であり、式(6)のように収束する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} \qquad (6)$$

式(6)を確認するためには、式(7)を用いる。

$$\int_{0}^{+\infty}\exp(-t^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (7)$$

式(8)と置いて置換積分する。

$$\varepsilon x=t \qquad (8)$$

関数exp($-t^2$)が偶関数であることから、区間0≦x＜+∞の積分を2倍する。近似変数$\varepsilon$が適当に小さい正の数に固定されているとき、式(6)のように収束する。

## (3) 無限積分の収束と発散

式(3)の関数I(x)も式(5)の関数I(x)も式(1)で定義される超関数i(x)の近似関数である。無限積分が、式(3)に対しては式(4)のように発散し、式(5)に対しては式(6)のように収束する。式(3)、式(5)は両方とも超関数i(x)の近似関数であり、式(4)、式(6)は両方とも超関数i(x)の近似関数の積分であるから、式(4)、式(6)が一致しないのは、一見すると奇妙に見える。

式(3)の場合、近似変数$\varepsilon$を含まないので、超関数i(x)の無限積分と式(4)の関係は式(9)のようになる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\,dx=+\infty \qquad (9)$$

式(5)の場合、近似変数$\varepsilon$を含むので、超関数i(x)の無限積分と式(6)の関係は式(10)のようになる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$$
$$=+\infty \qquad (10)$$

近似変数$\varepsilon$が適当に小さい数に固定されているとき、式(4)は発散、式(6)は収束で、一見すると異なるように見えるが、極限変動$\varepsilon\to 0$のとき、式(9)、式(10)のように両方とも+∞に発散する。