# ［質問］　ディラック関数の近似の証明

2018年3月17日
小林　保

(1) ディラック関数の定義
　汎関数型の理論において、任意の急減少関数$\phi(x)$を用いて、近似変数$\varepsilon$を含む関数$\Delta(x)$が式(1)を満足するとき、近似関数$\Delta(x)$がディラック関数$\delta(x)$を定義すると言う。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)dx=\phi(0) \tag{1}$$

(2) 正規関数の場合
　式(2)は平均値0、標準偏差$\varepsilon/\sqrt{2}$の正規分布である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \tag{2}$$

式(2)の関数$\Delta(x)$が式(1)を満足することは次のように確認できる。式(2)は式(3)を満足するので、式(4)のように変形される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)dx=1 \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx=0 \tag{4}$$

式(2)が式(4)を満足することを証明すれば、式(2)が式(1)を満足することを証明したことになる。
　式(4)の左辺について式(5)のように変形する。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\right|\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||\Delta(x)||\{\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\}|dx\end{aligned} \tag{5}$$

関数$\phi(x)$は急減少関数であるから、x→0のとき式(6)は有限な値$\phi'(0)$になる。x→-∞、x→+∞のとき$\phi(x)\to 0$になるから、式(6)の値→0になる。

$$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} \tag{6}$$

だから、式(6)について式(7)を満足する定数Mが存在する。

$$\left|\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right|\leqq M \tag{7}$$

式(7)を式(5)に代入すると、式(8)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}M\int_{-\infty}^{+\infty}|x||\Delta(x)|dx\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)の積分について式(9)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x||\Delta(x)|dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)dx \tag{9}$$

$-x^2/\varepsilon^2=u$とおくと、$dx=-(\varepsilon^2/2x)du$、x→∞のときu→-∞、x＝0のときu＝0だから、式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)dx\\ &=\int_{0}^{-\infty}\frac{-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\exp(u)du=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\end{aligned} \tag{10}$$

式(10)を式(9)に代入し、式(9)を式(8)に代入すると、式(11)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}M\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}=0\end{aligned} \tag{11}$$

式(11)のように式(4)が確認される。

(3) 標本化関数の場合
　式(12)はの関数$\Delta(x)$は標本化関数である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\pi x}\sin(\frac{x}{\varepsilon}) \tag{12}$$

式(12)が式(1)を満足することを確認しようとして、式(2)が式(1)を満足することを確認したのと類似の方法を試みる。式(12)は式(3)を満足するので、式(4)のように変形される。式(12)が式(4)を満足することを証明すれば、式(12)が式(1)を満足することを証明したことになる。
　式(4)の左辺について式(13)のように変形する。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}|\sin(\frac{x}{\varepsilon})||\{\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\}|dx\end{aligned} \tag{13}$$

関数$\phi(x)$について、式(7)を満足する定数Mが存在する。式(7)を式(13)に代入すると、式(14)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\right|\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M}{\pi}|\sin(\frac{x}{\varepsilon})|dx\end{aligned} \tag{14}$$

$x/\varepsilon=u$とおくと、$dx=\varepsilon du$、x→±∞のとき、u→±∞だから、式(14)から式(15)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin(u)|du\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{M\varepsilon}{\pi}\int_{-n\pi}^{+n\pi}|\sin(u)|du\end{aligned} \tag{15}$$

式(15)の積分について式(16)が成り立つ。

$$\int_{-n\pi}^{+n\pi}|\sin(u)|du=2n\int_{0}^{\pi}\sin(u)du=4n \tag{16}$$

式(16)を式(15)に代入すれば、式(17)が得られる。

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\{\phi(x)-\phi(0)\}dx\\ &\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{4nM\varepsilon}{\pi}=+\infty\end{aligned} \tag{17}$$

式(2)が式(1)を満足することを確認したのと類似の方法を試みても、式(17)が得られ、式(11)のように式(4)を確認することはできない。(12)が式(4)を満足することを証明するには別の方法を用いなければならない。

(4) 質問
　式(12)が式(1)を満足することを証明する方法を教えてください。

(5) 補足
　式(17)の収束と発散については極限の順序が影響する。式(17)においては変数nが変数$\varepsilon$より速く極限変動する。変数$\varepsilon$を適当に小さい値に固定して、変数n→+∞にする。この段階で$4nM\varepsilon/\pi$が+∞に発散し、その後に変数$\varepsilon\to 0$としても結果は変わらない。仮に、極限の順序を入れ換えると、$4nM\varepsilon/\pi$が0に収束する。極限の順序を入れ換えることは正しい計算とは思えない。