［質問］　成分表示型におけるフーリエ変換

2018年3月14日

小林　保

(1) フーリエ変換と逆変換

関数f(x)と関数g(y)が式(1)を満足するとき、関数g(y)を関数f(x)のフーリエ変換と言う。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx \qquad (1)$$

式(1)が成り立つとき、式(2)が成り立つ。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y} g(y)\,dy \qquad (2)$$

式(2)で関数f(x)を関数g(y)のフーリエ逆変換と言う。式(1)が成り立つとき、式(2)が成り立つことを確認するときに、式(3)を用いる。

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x} \qquad (3)$$

式(3)は標本化関数である。

(2) 式(1)から式(2)を導く

式(1)の変数xをtに変えて式(4)のように書き換える。

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t y} f(t)\,dt \qquad (4)$$

式(4)を式(2)に代入して式(5)のように計算する。

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t y} f(t)\,dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y}\cdot e^{-2\pi i t y} f(t)\,dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (x-t) y} f(t)\,dt\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (x-t) y}\,dy\right)f(t)\,dt \qquad (5)\end{aligned}$$

式(5)の第2辺の$e^{2\pi i x y}$は変数tに関して定数だから内側の積分記号と順序を交換して第3辺として良い。変数tと変数yの積分順序を変更して良いので、第4辺から第5辺が得られる。式(5)の第5辺の内側の積分を式(6)のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (x-t) y}\,dy&=\lim_{n\to\infty}\int_{-n/2\pi}^{+n/2\pi} e^{2\pi i (x-t) y}\,dy\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i(x-t)}\left[e^{2\pi i (x-t) y}\right]_{-n/2\pi}^{+n/2\pi}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\{n(x-t)\}}{\pi(x-t)} \qquad (6)\end{aligned}$$

式(3)のxにx-tを代入して式(7)が得られる。

$$\delta(x-t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\{n(x-t)\}}{\pi(x-t)} \qquad (7)$$

式(7)を式(6)に代入し、式(6)を式(5)に代入すると、式(8)のように計算され、式(1)が成り立つとき、式(2)が成り立つことを確認できる。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-t)f(t)\,dt=f(x) \qquad (8)$$

(3) 成分表示型における式(3)の妥当性

フーリエ変換の理論においては、式(1)から式(2)を導く際に式(3)を用いている。フーリエ変換の理論においては、式(3)が重要な役割を果たしている。

成分表示型の理論において、式(3)は式(9)～式(11)のもとで式(12)、式(13)と同義である。

$$\delta_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\{n(x-\rho)}{\pi(x-\rho)} \qquad (9)$$

$$\delta_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\{n(x+\rho)\}}{\pi(x+\rho)}-\frac{\sin\{n(x-\rho)\}}{\pi(x-\rho)}\right) \qquad (10)$$

$$\delta_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\frac{\sin(nt)}{\pi t}\,dt$$

$$(n=1、2、3、\cdots) \qquad (11)$$

$$\delta(x)=(0、0、1、0、0、\cdot\cdot\cdot)\quad (x=0) \qquad (12)$$

$$\delta(x)=(0、0、0、0、0、\cdot\cdot\cdot)\quad (x\neq 0) \qquad (13)$$

点x＝1について考え、式(9)で$\delta_h(1)$を計算すると収束しない。式(13)で点x＝1について考え、左連続成分を取り出すと$\delta_h(1)=0$になる。$\delta_h(1)$について式(9)と式(13)が一致しないので、成分表示型の理論において式(3)は不適切である。フーリエ変換の理論においては、式(3)が重要な役割を果たすので、成分表示型の理論においては、フーリエ変換を扱うことができない。

(4) 汎関数型における式(3)の妥当性

汎関数型の理論においては、フーリエ変換が扱われている。汎関数型においては、式(3)が成り立つらしい。汎関数型において、式(3)は式(14)と同義である。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x}\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad (14)$$

式(14)の証明を記述した文献は見当たらない。

(5) 質問

式(14)の証明の方法を教えてください。