曲線 $y=\frac{1}{x}\exp\{-(\frac{\varepsilon}{x})^2\}$ の追跡

2017年7月18日

小林　保

(1) 追跡の対象

式(1)の曲線は点x＝0において関数値を持たないが、式(2)が成り立つので改めて式(3)とすると、式(1)、式(3)の関数は点x＝0において滑らかに接続する。

$$y=\frac{1}{x}\exp\{-(\frac{\varepsilon}{x})^2\} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0} y=0 \quad (2)$$

$$y=0 \quad (x=0) \quad (3)$$

点x＝0において緩増加になる式(4)の関数に、点x＝0において急減少因数である式(5)を組み合わせて、式(1)、式(3)の関数が得られる。

$$y=\frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y=\exp\{-(\frac{\varepsilon}{x})^2\} \quad (5)$$

式(1)、式(3)の曲線を追跡する。

(2) 曲線の存在範囲と対称性

式(1)、式(3)の関数は実数全域$-\infty<x<+\infty$で定義される。奇関数であるから曲線は点x＝0に関して対称である。

(3) 漸近線

式(6)、式(7)が成り立つから曲線はx軸を漸近線に持つ。

$$\lim_{x\to -\infty} y=-0 \quad (6)$$

$$\lim_{x\to +\infty} y=+0 \quad (7)$$

(4) 極値

式(1)を微分して式(8)を得る。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^4}(x^2-2\varepsilon^2)\exp\{-(\frac{\varepsilon}{x})^2\} \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{とおくと、} x=-\sqrt{2}\varepsilon\text{、}x=+\sqrt{2}\varepsilon \quad (9)$$

式(9)から式(10)、式(11)が計算される。

$$x=-\sqrt{2}\varepsilon \text{のとき、} y=-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2e}} \quad (10)$$

$$x=\sqrt{2}\varepsilon \text{のとき、} y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2e}} \quad (11)$$

式(10)、式(11)を表に記入する。式(8)から$x<$式(10)のとき$\frac{dy}{dx}<0$、式(10)$<x<$式(11)のとき$\frac{dy}{dx}>0$、式(11)$<x$のとき$\frac{dy}{dx}<0$。表に記入する。表から式(10)が極小、式(11)が極大である。

(5) 変曲点

式(8)を微分して式(12)を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^7}(x^4-5\varepsilon^2x^2+2\varepsilon^4)\exp\{-(\frac{\varepsilon}{x})^2\} \quad (12)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{とおくと、} x=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\text{、} x=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\text{、} x=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\text{、} x=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon \quad (13)$$

式(13)から式(14)、式(15)、式(18)、式(16)、式(17)が計算される。

$x=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{-4}{10+2\sqrt{17}}) \quad (14)$$

$x=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{-2}{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{-4}{10-2\sqrt{17}}) \quad (15)$$

$x=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{-4}{10-2\sqrt{17}}) \quad (16)$$

$x=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{-4}{10+2\sqrt{17}}) \quad (17)$$

$\frac{2}{x^7}$はx＝0において符号を変える。

$$x=0 \text{のとき、} \quad y=0 \quad (18)$$

式(14)、式(15)、式(18)、式(16)、式(17)を表に記入する。式(12)から$x<$式(14)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}<0$、式(14)$<x<$式(15)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$、式(15)$<x<$式(18)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}<0$、式(18)$<x<$式(16)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$、式(16)$<x<$式(17)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}<0$、式(17)$<x$のとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$。表に記入する。表から式(14)、式(15)、式(18)、式(16)、式(17)が変曲点である。

表

x	$-\infty$	・・・	式(14)	・・・	式(10)	・・・	式(15)	・・・	式(18)	・・・	式(16)	・・・	式(11)	・・・	式(17)	・・・	$+\infty$
dy/dx	-0	−	−	−	0	+	+	+	×	+	+	+	0	−	−	−	-0
y	-0	↘	↘	↘	式(10)	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	式(11)	↘	↘	↘	+0
d^2y/dx^2	-0	−	0	+	+	+	0	−	×	+	0	−	−	−	0	+	+0
y	+0	∩	式(14)	∪	∪	∪	式(15)	∩	式(18)	∪	式(16)	∩	∩	∩	式(17)	∪	+0

(6) 極限

式(10)のときyは極小であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(19)、式(20)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\sqrt{2}\varepsilon)=-0 \tag{19}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2e}}\right)=-\infty \tag{20}$$

式(11)のときyは極大であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(21)、式(22)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}(\sqrt{2}\varepsilon)=+0 \tag{21}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2e}}\right)=+\infty \tag{22}$$

式(14)のとき変曲点であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(23)、式(24)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\right)=-0 \tag{23}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{-4}{10+2\sqrt{17}}\right)=-\infty \tag{24}$$

式(15)のとき変曲点であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(25)、式(26)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\right)=-0 \tag{25}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-2}{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{-4}{10-2\sqrt{17}}\right)=-\infty \tag{26}$$

式(16)のとき変曲点であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(27)、式(28)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\right)=0 \tag{27}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{-4}{10-2\sqrt{17}}\right)=+\infty \tag{28}$$

式(17)のとき変曲点であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(29)、式(30)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0} x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\right)=0 \tag{29}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{-4}{10+2\sqrt{17}}\right)=+\infty \tag{30}$$

(7) 数値計算

特殊定数e＝2.72である。有効数字3桁で計算する。近似変数ε＝0.1、0.2、0.5、1.0について計算する。

式(10)の極小値は式(31)～式(34)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=-0.141、y=-4.29　(31)
ε＝0.2のとき、x=-0.283、y=-2.14　(32)
ε＝0.5のとき、x=-0.707、y=-0.857　(33)
ε＝1.0のとき、x=-1.41、y=-0.429　(34)

式(11)の極大値は式(35)～式(38)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=0.141、y=4.29　(35)
ε＝0.2のとき、x=0.283、y=2.14　(36)
ε＝0.5のとき、x=0.707、y=0.857　(37)
ε＝1.0のとき、x=1.41、y=0.429　(38)

式(14)の変曲点は(39)～式(42)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=-0.214、y=-3.76　(39)
ε＝0.2のとき、x=-0.427、y=-1.88　(40)
ε＝0.5のとき、x=-1.07、y=-0.752　(41)
ε＝1.0のとき、x=-2.14、y=-0.376　(42)

式(15)の変曲点は(43)～式(46)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=-0.0662、y=-1.54　(43)
ε＝0.2のとき、x=-0.132、y=-0.772　(44)
ε＝0.5のとき、x=-0.331、y=-0.309　(45)
ε＝1.0のとき、x=-0.662、y=-0.154　(46)

式(16)の変曲点は(47)～式(50)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=0.0662、y=1.54　(47)
ε＝0.2のとき、x=0.132、y=0.772　(48)
ε＝0.5のとき、x=0.331、y=0.309　(49)
ε＝1.0のとき、x=0.662、y=0.154　(50)

式(17)の変曲点は(51)～式(54)で計算される。

ε＝0.1のとき、x=0.214、y=3.76　(51)
ε＝0.2のとき、x=0.427、y=1.88　(52)
ε＝0.5のとき、x=1.07、y=0.752　(53)
ε＝1.0のとき、x=2.14、y=0.376　(54)