［質問］　連続的微分可能の語感

2017年7月16日

小林　保

(1) 語感

「連続的微分可能」は漢字7文字から構成される1個の単語であるが、漢字の意味から「連続的」と「微分可能」の2つの部分に区切ることができる。連続的は微分可能を修飾しており、連続的に微分可能、繰り返し微分可能という語感を伴う。関数f(x)に導関数f'(x)が存在して、その関数f'(x)に更に導関数f''(x)が存在するという語感である。

(2) 定義

関数f(x)に導関数f'(x)が存在して、その導関数f'(x)が連続関数となるとき、関数f(x)は連続的微分可能であると言う。英語では「continuously differentiable」と言う。

(3) 質問　語感と定義の不一致

「連続的微分可能」の語感は定義と異なっている。定義を語感と一致させようとすれば、「導関数連続」と言うのが解り易いと思う。英語においても、「derivative continuous」と言うのが解り易いと思う。どんな事情で語感と定義が異なっているのか教えてください。

－　－

［参考］　微分可能と連続

(4) 参考　微分可能ならば連続

式(1)の右辺の極限が収束するとき、関数f(x)は微分可能である。

$$f'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \qquad (1)$$

式(2)の右辺の極限が収束するとき、関数f(x)は連続である。

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\{f(x+\varepsilon)-f(x)\} \qquad (2)$$

式(3)のように計算されるから、式(1)の右辺の極限が収束するとき、式(2)の右辺の極限も収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{f(x+\varepsilon)-f(x)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\cdot\varepsilon$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}f'(x)\cdot\varepsilon=0 \qquad (3)$$

(5) 参考　連続で微分不能な例

式(4)、式(5)で定義される関数f(x)は点x＝0で折れ曲がっており、連続ではあるが微分不能である。

$$f(x)=0 \qquad (x\leqq 0) \qquad (4)$$
$$f(x)=x \qquad (0\leqq x) \qquad (5)$$

区間x≠0においては微分可能であり、式(6)、式(7)の導関数f'(x)が得られる。

$$f'(x)=0 \qquad (x<0) \qquad (6)$$
$$f'(x)=1 \qquad (0<x) \qquad (7)$$

(6) 参考　導関数が連続で微分不能な例

式(8)、式(9)で定義される関数f(x)は微分可能であり、式(10)、式(11)の導関数f'(x)が得られる。

$$f(x)=0 \qquad (x\leqq 0) \qquad (8)$$
$$f(x)=x^2 \qquad (0\leqq x) \qquad (9)$$
$$f'(x)=0 \qquad (x\leqq 0) \qquad (10)$$
$$f'(x)=2x \qquad (0\leqq x) \qquad (11)$$

式(10)、式(11)の導関数f'(x)は点x＝0で折れ曲がっており、連続ではあるが微分不能である。

(5) 参考　導関数が不連続な例

式(12)、式(13)で定義される関数f(x)は微分可能である。

$$f(x)=0 \qquad (x=0) \qquad (12)$$
$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (13)$$

点x＝0における導関数f'(0)は式(14)のように計算される。

$$f'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2\sin\frac{1}{\varepsilon}-0}{\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon}=0 \qquad (14)$$

区間x≠0における導関数f'(x)は式(15)のように計算される。

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (15)$$

式(15)の導関数f'(x)は、$\lim_{x\to 0}f'(x)$が振動し、収束しない。式(14)のf'(0)と式(15)の$\lim_{x\to 0}f'(x)$が一致しないから、導関数f'(x)は不連続である。