汎関数収束

2017年4月10日
小林　保

(1) 各点収束

正の補助変数εと独立変数xを含む関数F(x)と独立変数xだけを含む関数f(x)について、補助変数εが0に近付く極限変動するとき関数F(x)が関数f(x)に近付くならば、関数F(x)が収束すると言い、式(1)のように表示する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(x)=f(x) \tag{1}$$

定義域内の各点xについて式(1)は成り立ち、補助変数εが変動するとき、独立変数xは定数のように振る舞う。式(1)を各点収束と言う。式(2)の補助変数λを用いると$\varepsilon\to 0$のとき$\lambda\to\infty$であるから式(1)を式(3)のように表示することができる。

$$\lambda=\frac{1}{\varepsilon} \tag{2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} F(x)=f(x) \tag{3}$$

補助変数λが自然数で離散的であるときF(x)は関数列と呼ばれる。

(2) 超関数を定義する汎関数収束

正の補助変数εと独立変数xを含む関数F(x)が、任意の急減少関数ϕ(x)を用いて式(4)の左辺が収束するとき、関数F(x)は汎関数収束すると言い、関数F(x)が超関数f(x)を定めると考え、上記の式(1)の各点収束と区別するために式(5)のように表示する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\phi(x)\,dx=\tau(\phi) \tag{4}$$

$$\operatorname*{limfun}_{\varepsilon\to 0} F(x)=f(x) \tag{5}$$

記号limが英語のlimitの省略なので英語のfunctionalの省略のfunを追加している。式(4)は関数ϕ(x)を入力し、数値$\tau(\phi)$を出力する汎関数を表している。超関数f(x)は汎関数$\tau(\phi)$と1対1に対応する。式(4)の左辺の積分区間は$-\infty<x<+\infty$であり、収束するために関数ϕ(x)は急減少関数でなければならない。

超関数の中には式(6)の関数Δ(x)が定義し、式(7)のように表示される超関数δ(x)のように、普通の関数でない場合もある。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)\phi(x)\,dx=\phi(0) \tag{6}$$

$$\operatorname*{limfun}_{\varepsilon\to 0} \Delta(x)=\delta(x) \tag{7}$$

式(6)の関数Δ(x)は点x＝0において各点収束しない。

(3) 普通の関数を定義する汎関数収束

正の補助変数εと独立変数xを含む関数F(x)と独立変数xだけを含む関数f(x)について、式(8)が成り立つとき、関数F(x)は関数f(x)に汎関数収束すると言い、式(9)のように表示する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx \tag{8}$$

$$\operatorname*{limfun}_{\varepsilon\to 0} F(x)=f(x) \tag{9}$$

式(8)の右辺は式(4)の右辺の特殊形であり、式(4)の右辺の数値$\tau(\phi)$が式(10)のように表されている。

$$\tau(\phi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx \tag{10}$$

式(8)の場合には、関数F(x)が定義する超関数f(x)は普通の関数f(x)である。誤解の心配が無いので同じ記号f(x)を用いる。式(6)の右辺は(10)のように表わすことができないので、式(7)の超関数δ(x)は普通の関数ではない。関数F(x)が関数f(x)に汎関数収束しても、各点収束しない場合があるから注意が必要である。

関数f(x)が関数値0の定数関数であるとき、式(8)は式(11)のように変形され、式(12)のように表示される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\phi(x)\,dx=0 \tag{11}$$

$$\operatorname*{limfun}_{\varepsilon\to 0} F(x)=0 \tag{12}$$

式(12)が成り立っても、式(13)が成り立たない場合があるから注意が必要である。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(x)=0 \tag{13}$$

$\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)$を微分すれば式(14)が得られるから、式(15)が成り立つ。

$$\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)=\varepsilon\left(\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right)'-\varepsilon\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x) \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)=\varepsilon\left[\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x) \tag{15}$$

関数ϕ(x)が急減少関数であるから、式(16)が成り立ち、式(15)の右辺第1項を計算すると0になる。

$$\phi(+\infty)=\phi(-\infty)=0 \tag{16}$$

関数ϕ'(x)が急減少関数であるから、式(15)の右辺第2項の積分が収束する。式(15)で$\varepsilon\to 0$とすると式(17)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\,dx=0 \tag{17}$$

関数$\cos\frac{x}{\varepsilon}$は関数値0の定数関数に汎関数収束し、式(17)は式(18)のように表示される。

$$\operatorname*{limfun}_{\varepsilon\to 0}\cos\frac{x}{\varepsilon}=0 \tag{18}$$

関数$\cos\frac{x}{\varepsilon}$は式(19)の各点収束しないので注意が必要である。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\cos\frac{x}{\varepsilon}=0 \qquad \text{（不成立）} \tag{19}$$

一見すると、式(14)で$\varepsilon\to 0$とすると式(19)が成り立つと思える。しかし、式(14)の右辺第1項は式(20)のように計算され、$\varepsilon\to 0$としても式(20)の右辺第1項が0にならない。

$$\varepsilon\left\{\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)\right\}'=\cos\frac{x}{\varepsilon}\phi(x)+\varepsilon\sin\frac{x}{\varepsilon}\phi'(x) \tag{20}$$

フーリエ変換の理論は式(18)のような汎関数収束を用いるので、式(19)のような各点収束しない場合がある。汎関数収束と各点収束の記号を区別せずに、式(18)を式(19)のように表示すると誤解を招き易い。式(18)と式(19)を区別することを勧める