［質問］　不思議な積分を持つ関数によるディラック関数の近似

2017年3月7日

小林　保

(1) 教科書の記述

篠崎の教科書[1)]の4頁には補助変数εを含む式(1)の関数f(t)が$\varepsilon\to0$のときf(t)→2δ(t)と説明されている。

$$f(t)=\varepsilon\exp(-\varepsilon|t|) \qquad (1)$$

補助変数εは$\varepsilon>0$側から極限変動する。f(t)/2がディラック関数δ(t)の近似関数であることになる。教科書[1)]の直前の記述と併せて考えると、式(2)、式(3)、式(4)が成り立つと教科書[1)]は説明していることになる。

$$\lim_{\varepsilon\to0}f(t)=+\infty \qquad (t=0) \qquad (2)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}f(t)=0 \qquad (t\neq0) \qquad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=2 \qquad (4)$$

(2) 質問　式(2)は不成立

式(1)でt＝0とおくと式(5)が得られる。

$$f(0)=\varepsilon\exp(-\varepsilon\cdot0)=\varepsilon\exp(0)=\varepsilon\cdot1$$
$$=\varepsilon \qquad (5)$$

式(5)で$\varepsilon\to0$とすると式(6)が得られ、式(2)は成り立たない。

$$\lim_{\varepsilon\to0}f(0)=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon=0 \qquad (6)$$

式(2)が成り立たないとすると、f(t)/2はディラック関数δ(t)の近似関数とは言えない。篠崎の教科書[1)]が正しいとすると、式(5)、(6)の検討に誤りがある。どこが誤りであるか教えてください。式(2)の証明方法を教えてください。

(3) 不思議な積分

式(6)、式(3)を式(7)と書き換える事ができる。

$$\lim_{\varepsilon\to0}f(t)=0 \qquad (7)$$

式(7)を積分すると、式(8)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot dt=0 \qquad (8)$$

式(4)の左辺と式(8)の左辺は極限記号$\lim_{\varepsilon\to0}$と積分記号$\int_{-\infty}^{+\infty}$の順序が異なっている。極限と積分の計算の順序を換えると結果が2と0で異なってしまう。

参考文献

1)　篠崎寿夫、松森徳衛、松浦武信著、デルタ関数入門、現代工学社、1983年

－　－

［参考］　式(3)と式(4)の証明

(4) 参考　式(3)の証明

式(1)で独立変数tを適当な定数に固定すると、$\varepsilon\to0$のとき$-\varepsilon|t|\to0$になるから、式(9)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\exp(-\varepsilon|t|)=\exp(0)=1 \qquad (9)$$

式(1)と式(9)を組合せて、式(10)が得られ、式(3)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to0}f(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\exp(-\varepsilon|t|)=0\cdot1=0 \qquad (10)$$

式(10)を導く過程で独立変数tを適当な定数に固定するが、必ずしも、t≠0に限らず、t＝0でも構わない。式(3)の証明と式(6)の証明は別々に行う必要はない。

(5) 参考　式(4)の証明

式(1)の関数f(t)は偶感数であるから、式(11)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=2\int_{0}^{+\infty}\varepsilon\exp(-\varepsilon t)\,dt \qquad (11)$$

式(11)の右辺の積分区間がt≧0であるから式(12)が成り立ち、式(12)が式(11)で使われている。

$$-\varepsilon|t|=-\varepsilon t \qquad (t\geqq0) \qquad (12)$$

$-\varepsilon t=u$とおくと、t＝0のときu＝0、t→+∞のときu→-∞、$dt=-\frac{1}{\varepsilon}du$だから、式(13)のように計算される。

$$\int_{0}^{+\infty}\varepsilon\exp(-\varepsilon t)\,dt=\int_{0}^{-\infty}\varepsilon\exp(u)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)du$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\exp(u)\,du=\exp(0)-\exp(-\infty)$$
$$=1-0=1 \qquad (13)$$

式(13)を式(11)に代入すれば、式(4)が成り立つ。