［質問］　サンプリング関数によるディラック関数の近似

2017年2月17日
小林　保

(1) サンプリング関数

補助変数λを含む式(1)の関数S(t)はサンプリング関数と呼ばれる。

$$S(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\lambda t) \tag{1}$$

篠崎の教科書[1)]の4頁には式(1)の関数S(t)が式(2)、式(3)、式(4)を満足するので、ディラック関数δ(t)の近似関数の1つであり、λ→+∞のときS(x)→δ(x)であると記述されている。

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(0) = +\infty \tag{2}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(t) = 0 \qquad (t \neq 0) \tag{3}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,dt = 1 \tag{4}$$

(2) 質問　式(3)は不成立

t≠0の1例としてt＝1を考える。式(1)にt＝1を代入すると式(5)が得られる。

$$S(1) = \frac{1}{\pi}\sin(\lambda) \tag{5}$$

式(5)でλ→+∞としても値S(1)は式(6)の範囲で振動し、収束しない。

$$-\frac{1}{\pi} \leqq \lim_{\lambda \to +\infty} S(1) \leqq +\frac{1}{\pi} \tag{6}$$

式(6)は式(3)の反例である。式(3)が成り立たないとすると、式(1)の関数S(t)はディラック関数δ(t)の近似関数とは言えない。篠崎の教科書[1)]が正しいとすると、式(5)、式(6)の検討に誤りがある。どこが誤りであるか教えてください。式(3)の証明方法を教えてください。

参考文献

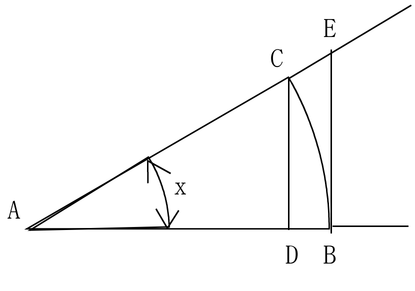
1)　篠崎寿夫、松森徳衛、松浦武信著、デルタ関数入門、現代工学社、1983年

－　－

［参考］　式(2)と式(4)の証明

(3) 準備　$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

中心A、半径ABの円弧$\overset{\frown}{BC}$を描き、∠BAC＝xとすると、式(7)が成り立つ。



$$\overset{\frown}{BC} = AB \cdot x \tag{7}$$

点Cから直線ABに垂線CDを引くと、式(8)が成り立つ。

$$CD = AC \cdot \sin(x) = AB \cdot \sin(x) \tag{8}$$

点Bから直線ABに垂線を引き、直線ACとの交点をEとすると、式(9)が成り立つ。

$$BE = AB \cdot \tan(x) \tag{9}$$

図から式(10)が成り立つ。

$$CD < \overset{\frown}{BC} \tag{10}$$

式(7)、式(8)を代入して、両辺をAB・xで割り算すれば式(11)が得られる。

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 \tag{11}$$

図から式(12)が成り立つ。

$$\overset{\frown}{BC} < BE \tag{12}$$

式(7)、式(9)を代入して、両辺をAB・xで割り算し、cos(x)を掛け算すれば式(13)が得られる。

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} \tag{13}$$

式(11)、式(13)でx→0とすれば式(14)が得られる。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{14}$$

(4) 参考　式(2)の証明

式(1)の関数S(t)にt＝0を直接に代入しても計算することができず、関数値S(0)は存在しない。λt＝uとおくと式(15)のように計算される。

$$S(t)=\frac{\lambda}{\pi u}\sin(u)=\frac{\lambda}{\pi}\ \frac{\sin(u)}{u} \qquad (15)$$

式(14)を用いると式(16)が得られるから、式(15)と式(17)は滑らかに接続する。

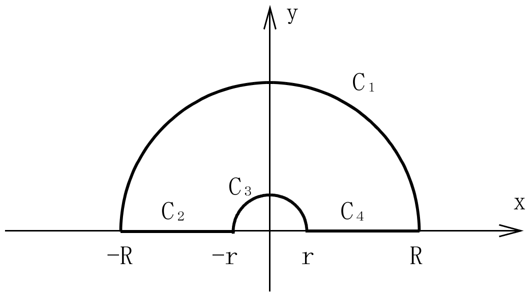
$$\lim_{t\to 0}S(t)=\frac{\lambda}{\pi} \qquad (16)$$

$$S(0)=\frac{\lambda}{\pi} \qquad (17)$$

関数値S(0)を改めて式(17)で定義する。式(17)を用いると式(2)が成立する。

(5) 準備　$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

点x＝Rから上半平面を通って点x＝-Rに到る半円を曲線C_1、点x＝-Rからx軸上を通って点x＝-rに到る直線を曲線C_2、点x＝-rから上半平面を通って点x＝rに到る半円を曲線C_3、点x＝rからx軸上を通って点x＝Rに到る直線を曲線C_4とする。曲線$C_1+C_2+C_3+C_4$は閉曲線であり、閉曲線内で関数



$\dfrac{e^{iz}}{z}$は正則であるから、式(18)が成り立つ。

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \qquad (18)$$

式(18)は式(19)のように変形される。

$$\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz$$
$$=-\left(\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) \qquad (19)$$

曲線C_1上の積分をするために式(20)とおく。

$$z=Re^{i\theta} \qquad (20)$$

曲線C_1は変数θが0からπまでである。式(21)が成り立つから式(22)のように計算される。

$$z=Re^{i\theta}=R(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (21)$$

$$|e^{iz}|=|e^{iR\cos\theta-R\sin\theta}|=|e^{iR\cos\theta}|\cdot|e^{-R\sin\theta}|$$
$$=e^{-R\sin\theta}=\exp(-R\sin\theta) \qquad (22)$$

式(22)の計算で$|e^{iR\cos\theta}|=1$、$\exp(-R\sin\theta)>0$を用いている。式(22)、式(23)、式(25)を用いて式(26)のように計算する。

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{1}{Re^{i\theta}}\right|=\frac{1}{|R|\cdot|e^{i\theta}|}=\frac{1}{R} \qquad (23)$$

$$dz=Rie^{i\theta}d\theta \qquad (24)$$

$$|dz|=|Rie^{i\theta}|d\theta=|R|\cdot|i|\cdot|e^{i\theta}|$$
$$=Rd\theta \qquad (25)$$

$$\left|\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\leqq\int_{C_1}|e^{iz}|\cdot\left|\frac{1}{z}\right|\cdot|dz|$$
$$=\int_0^{\pi}\exp(-R\sin\theta)\cdot\frac{1}{R}\cdot R\ d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\exp(-R\sin\theta)d\theta \qquad (26)$$

関数$\sin\theta$が直線$\theta=\dfrac{\pi}{2}$に関して対称であるから式(27)のように計算される。

$$\int_0^{\pi}\exp(-R\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp(-R\sin\theta)d\theta \qquad (27)$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき$\dfrac{2}{\pi}\theta\leqq\sin\theta$が成り立ち、式(28)が成り立つ。

$$\exp(-R\sin\theta)\leqq\exp\left(-R\frac{2}{\pi}\theta\right) \qquad (28)$$

式(28)が成り立つ区間で積分すれば式(29)が得られる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp(-R\sin\theta)\ d\theta\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{2R}{\pi}\theta\right)\ d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2R}\{1-\exp(-R)\} \qquad (29)$$

式(29)を式(27)に代入し、式(27)を式(26)に代入し、R→+∞とすれば式(30)のように計算される。

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\leqq\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{R}\ \{1-\exp(-R)\}=0 \qquad (30)$$

曲線C_3上の積分をするために式(31)とおく。

$$z=re^{i\theta} \qquad (31)$$

曲線C_3は変数θがπから0までである。関数e^{iz}をz＝0の回りにテイラー展開すれば式(32)が得られる。

$$e^{iz}=1+\frac{i}{1!}z-\frac{1}{2!}z^2-\frac{i}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots \quad (32)$$

式(33)とおけば、式(32)から式(34)が成り立つ。

$$g(z)=\frac{i}{1!}-\frac{1}{2!}z^1-\frac{i}{3!}z^2+\frac{1}{4!}z^3+\cdots \quad (33)$$

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+g(z) \quad (34)$$

式(33)の関数g(z)は正則であるから有界であり、適当に大きな定数Mに対して式(35)が成り立つ。

$$|g(z)|\leqq M \quad (35)$$

式(35)、式(37)を用いて式(38)が得られる。

$$dz=rie^{i\theta}d\theta \quad (36)$$

$$|dz|=|rie^{i\theta}|d\theta=r\,d\theta \quad (37)$$

$$\left|\int_{C_3}g(z)dz\right|\leqq\int_{C_3}|g(z)|\cdot|dz|\leqq\int_{\pi}^{0}M\cdot r\,d\theta$$
$$=Mr\cdot(0-\pi)=-Mr\pi \quad (38)$$

式(38)でr→0とすれば式(39)が得られる。

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_3}g(z)dz=0 \quad (39)$$

式(31)、式(36)を用いて式(40)が得られる。

$$\int_{C_3}\frac{1}{z}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{1}{re^{i\theta}}\cdot rie^{i\theta}d\theta$$
$$=\int_{\pi}^{0}i\,d\theta=i(0-\pi)=-i\pi \quad (40)$$

式(40)でr→0とすれば式(41)が得られる。

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_3}\frac{1}{z}dz=-i\pi \quad (41)$$

式(34)、式(39)、式(41)から式(42)が得られる。

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{z}dz=-i\pi \quad (42)$$

曲線C_2上と曲線C_4上の積分をするために式(43)とおく。

$$z=x \quad (43)$$

曲線C_2は変数xが-Rから-rまで、曲線C_4は変数xがrからRまでである。x=-uとおくと、x=-Rのときu=R、x=-rのときu=rであるから、曲線C_2上の積分は式(44)のように計算される。

$$\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-r}\frac{\cos(x)+i\sin(x)}{x}dx$$
$$=\int_{r}^{R}\frac{-\cos(u)+i\sin(u)}{u}du \quad (44)$$

曲線C_4上の積分は式(45)のように計算される。

$$\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{r}^{R}\frac{\cos(x)+i\sin(x)}{x}dx \quad (45)$$

式(44)の変数uをxに変え、式(45)と足し算すると式(46)が得られる。

$$\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin(x)}{x}dx \quad (46)$$

式(46)でr→0、R→0とすれば、式(47)のように計算される。

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\left(\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz\right)$$
$$=2i\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx \quad (47)$$

式(19)でr→0、R→0としてから、式(30)、式(42)、式(47)を代入すれば式(48)が得られる。

$$2i\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=-(-i\pi)=i\pi \quad (48)$$

式(48)から式(49)が得られる。

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2} \quad (49)$$

(6) 参考　式(4)の証明

関数S(t)は偶関数だから式(50)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}S(t)dt=2\int_{0}^{+\infty}S(t)dt \quad (50)$$

$\lambda t=u$とおくと、t=0のときu=0、t→+∞のときu→+∞、$\lambda dt=du$となるから、式(49)を用いて式(51)のように計算される。

$$\int_{0}^{+\infty}S(t)dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{\lambda}{\pi u}\sin(u)\frac{1}{\lambda}du$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=\frac{1}{2} \quad (51)$$

式(51)を式(50)に代入すれば式(52)が成り立ち、式(4)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}S(t)dt=1 \quad (52)$$