曲線 $y==\frac{2x^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}$ の追跡

2017年2月5日
小林　保

(1) 追跡の対象

式(1)の曲線はディラック関数$\delta(x)$の近似関数の1つである。

$$y=\frac{2x^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (1)$$

式(1)の曲線を追跡する。

(2) 曲線の存在範囲と対称性

指数関数は正の値だけを取り、x^2は非負の値だけを取るから式(2)が成り立つ。

$$y\geqq 0 \qquad (2)$$

式(1)は偶関数であり、y軸に関して対称である。

(3) 準備 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

n＝0､1､2､・・・に対して式(3)とおき、式(3)を微分すると式(4)が得られる。

$$f(x)=\frac{x^{n+1}}{e^x} \qquad (0<x) \qquad (3)$$

$$f'(x)=\frac{(n+1-x)x^n}{e^x} \qquad (4)$$

$$f(x)=0とおくと、x=0、x=n+1 \qquad (5)$$

$0<x<n+1$のとき$f'(x)>0$、$x>n+1$のとき$f'(x)<0$。
$x=n+1$で$f(x)$が最大になり、式(6)が成り立つ。

$$\frac{x^{n+1}}{e^x}\leqq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \qquad (6)$$

$x>0$だから式(7)が成り立つ。

$$0<\frac{x^n}{e^x}\leqq\frac{1}{x}\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \qquad (7)$$

$x\to+\infty$のとき、式(7)の第1辺、第3辺が+0に収束するから、式(8)が成り立つ。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}x^n\exp(-x)=+0 \qquad (8)$$

式(9)とおくと$x\to-\infty$､$x\to+\infty$のとき$t\to+\infty$になる。

$$(\frac{x}{\varepsilon})^2=t \qquad (9)$$

式(8)のxをtに変えてから式(9)を代入すると式(10)、式(11)を得る。

$$\lim_{x\to+\infty}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (11)$$

式(12)のように変形されるから、式(10)のnをn+1に置き換えれば、式(13)、式(14)を得る。

$$x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}$$
$$=\frac{\varepsilon^2}{x}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^{n+1}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (12)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (13)$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=-0 \qquad (14)$$

$\varepsilon\to+0$のとき式(9)の$t\to+\infty$だから、式(8)のxをtに変えてから式(9)を代入し、n＝1とすれば式(15)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\frac{x}{\varepsilon})^2\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (15)$$

(4) 漸近線

式(1)を式(16)のように変形する。

$$y=\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}}(\frac{x}{\varepsilon})^2\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (16)$$

式(10)、式(11)でn＝1として式(16)に適用すれば、式(17)が成り立つ。

$$x\to-\infty、x\to+\inftyのとき、y\to+0 \qquad (17)$$

式(17)は曲線がx軸を漸近線に持つことを示している。式(17)を表に記入する。

(4) 極値

式(1)を微分して式(18)を得る。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{\varepsilon^5\sqrt{\pi}}\{-x(x^2-\varepsilon^2)\}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\} \qquad (18)$$

$$\frac{dy}{dx}=0とおくと、x=0、x=+\varepsilon、x=-\varepsilon \qquad (19)$$

式(19)から式(20)、式(21)、式(22)を得る。

$$x=-\varepsilonのとき、y=\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}e} \qquad (20)$$

$$x=0のとき、y=0 \qquad (21)$$

$$x=+\varepsilonのとき、y=\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}e} \qquad (22)$$

式(20)､式(21)､式(22)を表に記入する。式(18)から、x＜式(20)のとき$\frac{dy}{dx}>0$､式(20)＜x＜式(21)のとき$\frac{dy}{dx}<0$、式(21)＜xのとき$\frac{dy}{dx}>0$。表に記入する。表から式(20)、式(22)が極大値であり、式(21)が極小値である。

(6) 変曲点

式(18)を微分して式(23)を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{\varepsilon^7\sqrt{\pi}}(2x^4-5\varepsilon^2x^2+\varepsilon^4)\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (23)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0とおくと、x=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\varepsilon、-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\varepsilon、+\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\varepsilon、+\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\varepsilon、 \qquad (24)$$

式(24)から、式(25)、式(26)、式(27)、式(28)が計算される。

$x=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}(\frac{5+\sqrt{17}}{2})\exp(-\frac{5+\sqrt{17}}{4}) \qquad (25)$$

$x=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}(\frac{5-\sqrt{17}}{2})\exp(-\frac{5-\sqrt{17}}{4}) \qquad (26)$$

$x=+\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}(\frac{5-\sqrt{17}}{2})\exp(-\frac{5-\sqrt{17}}{4}) \qquad (27)$$

$x=+\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\varepsilon$のとき、

$$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}(\frac{5+\sqrt{17}}{2})\exp(-\frac{5+\sqrt{17}}{4}) \qquad (28)$$

表に式(25)、式(26)、式(27)、式(28)を記入する。
式(23)から、x＜式(25)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$、

式(25)＜x＜式(26)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}<0$、

式(26)＜x＜式(27)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$、

式(27)＜x＜式(28)のとき$\frac{d^2y}{dx^2}<0$、

式(28)＜xのとき$\frac{d^2y}{dx^2}>0$。表に記入する。表から式(25)、式(26)、式(27)、式(28)は変曲点である。

表

x	−∞	・・・	式(25)	・・・	式(20)	・・・	式(26)	・・・	式(21)	・・・	式(27)	・・・	式(22)	・・・	式(28)	・・・	+∞
dy/dx	+0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	−0
y	+0	↗	↗	↗	式(20)	↘	↘	↘	式(21)	↗	↗	↗	式(22)	↘	↘	↘	+0
d^2y/dx^2	+0	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+0
y	+0	∪	式(25)	∩	∩	∩	式(26)	∪	∪	∪	式(27)	∩	∩	∩	式(28)	∪	+0

(7) 極限

式(20)が極大値であるが、$\varepsilon\to+0$の極限は式(29)、式(30)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}x=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)=-0 \qquad (29)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\frac{1}{e}=+\infty \qquad (30)$$

式(22)が極大値であるが、$\varepsilon\to+0$の極限は式(31)、式(32)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}x=\lim_{\varepsilon\to+0}(+\varepsilon)=+0 \qquad (31)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\frac{1}{e}=+\infty \qquad (32)$$

式(21)が極小値であるから、点x＝0の付近でyが0から+∞まで激しく変動する。

式(25)、式(26)、式(27)、式(28)は変曲点であるが、式(25)の$\varepsilon\to+0$の極限は式(33)、式(34)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\varepsilon\right)=0 \qquad (33)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\exp\left(-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)=+\infty \qquad (34)$$

式(26)、式(27)、式(28)の極限も式(25)と同じように、$\varepsilon\to+0$のとき(x、y)→(0、+∞)に収束する。

式(18)を式(35)のように変形する。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\{x(\frac{x}{\varepsilon})^2\}\{xp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\}$$
$$+\frac{4}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\} \qquad (35)$$

n＝1、0として項別に式(13)、式(14)を適用すると、x→-∞、x→-∞のとき$\frac{dy}{dx}\to0$だから式(36)、式(37)が成り立つ。

$$x\to-\infty のとき \frac{dy}{dx}>0 だから \frac{dy}{dx}\to+0 \qquad (36)$$

$$x\to+\infty のとき \frac{dy}{dx}<0 だから \frac{dy}{dx}\to-0 \qquad (37)$$

式(36)、式(37)を表に記入する。

式(23)を変形して式(38)を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^2\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)$$
$$-\frac{20}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}(\frac{x}{\varepsilon})^2\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)$$
$$+\frac{4}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (38)$$

n＝2、1、0として項別に式(10)、式(11)を適用すると、x→-∞の、x→+∞のとき$\frac{d^2y}{dx^2}\to0$だから式(39)、式(40)がなりたつ。

$$x\to-\infty のとき \frac{d^2y}{dx^2}>0 だから \frac{d^2y}{dx^2}\to+0 \qquad (39)$$

$$x\to+\infty のとき \frac{d^2y}{dx^2}>0 だから \frac{d^2y}{dx^2}\to+0 \qquad (40)$$

式(39)、式(40)を表に記入する。

(8) 数値計算

特殊定数、π＝3.14、e＝2.72である。有効数字3桁で計算する。近似変数ε＝0.1、0.2、0.5、1.0について計算する。

式(20)の極大値は式(41)～式(44)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝-0.100、y＝4.15 (41)
ε＝0.2のとき、x＝-0.200、y＝2.07 (42)
ε＝0.5のとき、x＝-0.500、y＝0.830 (43)
ε＝1.0のとき、x＝-1.000、y＝0.415 (44)

式(22)の極大値は式(45)～式(48)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝0.100、y＝4.15 (45)
ε＝0.2のとき、x＝0.200、y＝2.07 (46)
ε＝0.5のとき、x＝0.500、y＝0.830 (47)
ε＝1.0のとき、x＝1.000、y＝0.415 (48)

式(25)で計算される変曲点は式(49)～式(52)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝-0.151、y＝2.63 (49)
ε＝0.2のとき、x＝-0.302、y＝1.32 (50)
ε＝0.5のとき、x＝-0.755、y＝0.526 (51)
ε＝1.0のとき、x＝-1.51、y＝0.263 (52)

式(26)で計算される変曲点は式(53)～式(56)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝-0.0468、y＝1.99 (53)
ε＝0.2のとき、x＝-0.0936、y＝0.994 (54)
ε＝0.5のとき、x＝-0.234、y＝0.397 (55)
ε＝1.0のとき、x＝-0.468、y＝0.199 (56)

式(27)で計算される変曲点は式(57)～式(60)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝0.0468、y＝1.99 (57)
ε＝0.2のとき、x＝0.0936、y＝0.994 (58)
ε＝0.5のとき、x＝0.234、y＝0.397 (59)
ε＝1.0のとき、x＝0.468、y＝0.199 (60)

式(28)で計算される変曲点は式(61)～式(64)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝0.151、y＝2.63 (61)
ε＝0.2のとき、x＝0.302、y＝1.32 (62)
ε＝0.5のとき、x＝0.755、y＝0.526 (63)
ε＝1.0のとき、x＝1.51、y＝0.263 (64)