曲線 $y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\}$ の追跡

2016年1月12日

小林　保

(1) 追跡の対象

式(1)の曲線はディラック関数$\delta(x)$の近似関数の1つである。

$$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (1)$$

平均値0、標準偏差$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$の正規分布関数である。式(1)の曲線を追跡する。

(2) 曲線の存在範囲と対称性

指数関数は正の値だけを取るから式(2)が成り立つ。

$$y>0 \qquad (2)$$

式(1)は偶関数であり、y軸に関して対称である。

(3) 準備 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

n＝0､1､2､・・・に対して式(3)とおき、式(3)を微分すると式(4)が得られる。

$$f(x)=\frac{x^{n+1}}{e^x} \qquad (0<x) \qquad (3)$$

$$f'(x)=\frac{(n+1-x)x^n}{e^x} \qquad (4)$$

$$f(x)=0 \text{とおくと、} x=0、x=n+1 \qquad (5)$$

$0<x<n+1$のとき$f'(x)>0$、$x>n+1$のとき$f'(x)<0$。$x=n+1$で$f(x)$が最大になり、式(6)が成り立つ。

$$\frac{x^{n+1}}{e^x}\leqq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \qquad (6)$$

$x>0$だから式(7)が成り立つ。

$$0<\frac{x^n}{e^x}\leqq\frac{1}{x}\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \qquad (7)$$

$x\to+\infty$のとき、式(7)の第1辺、第3辺が+0に収束するから、式(8)が成り立つ。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}x^n\exp(-x)=+0 \qquad (8)$$

式(9)とおくと$x\to-\infty$､$x\to+\infty$のとき$t\to+\infty$になる。

$$(\frac{x}{\varepsilon})^2=t \qquad (9)$$

式(8)のxをtに変えてから式(9)を代入すると式(10)、式(11)を得る。

$$\lim_{x\to+\infty}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (11)$$

式(12)のように変形されるから、式(10)のnをn+1に置き換えれば、式(13)、式(14)を得る。

$$x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}$$
$$=\frac{\varepsilon^2}{x}\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^{n+1}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (12)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (13)$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\{(\frac{x}{\varepsilon})^2\}^n\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=-0 \qquad (14)$$

$\varepsilon\to+0$のとき式(9)の$t\to+\infty$だから、式(8)のxをtに変えてから式(9)を代入し、n＝1とすれば式(15)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\frac{x}{\varepsilon})^2\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}=+0 \qquad (15)$$

(4) 漸近線

近似変数εを適当に小さい正の数εに固定し、式(10)、式(11)でn＝0として式(1)に適用すれば、式(16)が成り立つ。

$$x\to-\infty、x\to+\infty \text{のとき、} y\to+0 \qquad (16)$$

曲線はx軸を漸近線に持つ。式(16)を表に記入する。

(5) 極値

式(1)を微分して式(17)を得る。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\} \qquad (17)$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{とおくと、} x=0。 \qquad (18)$$

式(18)から式(19)が計算される。

$$x=0 \text{のとき、} y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \qquad (19)$$

式(19)を表に記入する。式(17)からx＜式(19)のとき$\frac{dy}{dx}>0$、式(19)＜xのとき$\frac{dy}{dx}<0$。表に記入する。表から式(19)が極大値である。

(6) 変曲点

式(17)を微分して式(20)を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{\varepsilon^5\sqrt{\pi}}(x^2-\frac{\varepsilon^2}{2})\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (20)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{とおくと、} x=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}、x=+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \qquad (21)$$

式(21)から式(22)、式(23)が計算される。

$$x=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{のとき、} y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}\sqrt{e}} \qquad (22)$$

$x=+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ のとき、$y=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}\sqrt{e}}$ (23)

式(22)、式(23)を表に記入する。式(20)から x＜式(22)のとき $\frac{d^2y}{dx^2}>0$、式(22)＜x＜式(23)のとき $\frac{d^2y}{dx^2}<0$、式(23)＜xのとき $\frac{d^2y}{dx^2}>0$。表に記入する。表から式(22)、式(23)が変曲点である。

表

x	-∞	・・・	式(22)	・・・	式(19)	・・・	式(23)	・・・	+∞
dy/dx	+0	+	+	+	0	−	−	−	-0
y	+0	↗	↗	↗	式(19)	↘	↘	↘	+0
d^2y/dx^2	+0	+	0	−	−	−	0	+	+0
y	+0	∪	式(22)	∩	∩	∩	式(23)	∪	+0

(7) 極限

x＝0のとき、yは式(19)の極大であり、$\varepsilon\to+0$の極限は式(24)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}=+\infty \qquad (24)$$

x≠0のとき、yの$\varepsilon\to+0$の極限を計算する。x≠0ではあるが、定数kとして式(25)の従属関係があるとき、式(26)が成り立つ。

$$x=k\varepsilon \qquad (25)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-k^2)=+\infty \quad (x\neq 0) \qquad (26)$$

x≠0であり、式(25)の従属関係がないとき、式(1)を式(27)のように変形する。

$$y=\frac{\varepsilon}{x^2\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\exp\left\{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right\} \qquad (27)$$

式(15)を式(27)に適用すれば式(28)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=+0 \qquad (28)$$

式(22)、式(23)の変曲点については、式(29)のように計算される。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}\sqrt{e}}=+\infty \qquad (29)$$

式(22)、式(23)のxは式(25)の従属関係があり、$k=-\frac{1}{\sqrt{2}}$、$k=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、式(29)は式(26)と同じになる。

近似変数εを適当に小さい正の数εに固定し、式(13)、式(14)でn＝0として式(17)に適用すれば、式(30)、式(31)を得る。

$$x\to-\infty のとき \frac{dy}{dx}\to+0 \qquad (30)。$$

$$x\to+\infty のとき \frac{dy}{dx}\to-0 \qquad (31)。$$

式(30)、式(31)を表に記入する。式(20)を変形して式(32)を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\exp\left\{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right\}-\frac{2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right\} \qquad (32)$$

式(10)、式(11)でn＝1として式(32)の第1項に適用し、n＝0として第2項に適用すればし、式(33)を得る。

$$x\to-\infty、x\to+\infty のとき \frac{d^2y}{dx^2}\to 0 \qquad (33)$$

x＜式(22)のとき $\frac{d^2y}{dx^2}>0$だから、式(33)を併せ考えると式(34)が得られる。

$$x\to-\infty のとき \frac{d^2y}{dx^2}\to+0 \qquad (34)$$

式(23)＜xのとき $\frac{d^2y}{dx^2}>0$だから、式(33)を併せ考えると式(35)が得られる。

$$x\to+\infty のとき \frac{d^2y}{dx^2}\to+0 \qquad (35)$$

式(34)、式(35)を表に記入する。

(8) 数値計算

特殊定数、π＝3.14、e＝2.72である。有効数字3桁で計算する。近似変数ε＝0.1、0.2、0.5、1.0について計算する。

式(19)の極大値は式(36)～式(39)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝0、y＝5.64 (36)

ε＝0.2のとき、x＝0、y＝2.82 (37)

ε＝0.5のとき、x＝0、y＝1.13 (38)

ε＝1.0のとき、x＝0、y＝0.564 (39)

式(22)の変曲点は(40)～式(43)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝-0.0707、y＝3.42 (40)

ε＝0.2のとき、x＝-0.141、y＝1.71 (41)

ε＝0.5のとき、x＝-0.354、y＝0.684 (42)

ε＝1.0のとき、x＝-0.707、y＝0.342 (43)

式(23)の変曲点は(44)～式(47)で計算される。

ε＝0.1のとき、x＝0.0707、y＝3.42 (44)

ε＝0.2のとき、x＝0.141、y＝1.71 (45)

ε＝0.5のとき、x＝0.354、y＝0.684 (46)

ε＝1.0のとき、x＝0.707、y＝0.342 (47)