# 急減少関数

2016年12月16日
小林　保

(1) 急減少関数の定義

無限回微分可能で、非負整数m、nに対して $|x| \to \infty$ のとき $x^m f^{(n)}(x) \to 0$ となる関数 $f(x)$ を急減少関数と言う。$x^0 = 1$、$f^{(0)}(x) = f(x)$ である。「急減少」と言う用語は「減少」と言う用語と、一見すると類似しているが、意味がかなり異なるので注意が必要である。急減少と言う用語は意味が減少と言う用語よりもむしろ「無限小」と言う用語に近い。減少は独立変数の増加に伴う従属変数の減少を意味する。急減少は独立変数の極限変動に伴う従属変数の0への収束を意味する。

(2) 急減少関数の和、定数倍、積

(定理１)

関数 $f(x)$、$g(x)$ が急減少関数であるとき、和の $f(x)+g(x)$ も急減少関数である。

(証明)

$|x| \to \infty$ のとき $x^m\{f(x)+g(x)\}^{(n)} \to 0$ となることが、式(1)の計算からわかる。

$$x^m\{f(x)+g(x)\}^{(n)} = x^m\{f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)\}$$
$$= x^m f^{(n)}(x) + x^m g^{(n)}(x) \to 0+0 = 0 \qquad (1)$$

(定理２)

関数 $f(x)$ が急減少関数であるとき、定数kを用いた定数倍の $kf(x)$ も急減少関数である。

(証明)

$|x| \to \infty$ のとき $x^m\{kf(x)\}^{(n)} \to 0$ となることが、式(2)の計算からわかる。

$$x^m\{kf(x)\}^{(n)} = x^m k f^{(n)}(x) = k x^m f^{(n)}(x)$$
$$\to k \cdot 0 = 0 \qquad (2)$$

(定理３)

関数 $f(x)$、$g(x)$ が急減少関数であるとき、積の $f(x) \cdot g(x)$ も急減少関数である。

(証明)

$|x| \to \infty$ のとき $x^m\{f(x) \cdot g(x)\}^{(n)} \to 0$ となることが、式(3)の計算からわかる。

$$x^m\{f(x) \cdot g(x)\}^{(n)}$$
$$= x^m\left\{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)\right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \{x^m f^{(k)}(x)\} \cdot g^{(n-k)}(x)$$
$$\to \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot 0 = 0 \qquad (3)$$

(3) 急減少関数の微分と積分

(定理４)

関数 $f(x)$ が実数全域で連続で、$|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となれば、関数 $|f(x)|$ は最大値を持つ。

(証明)

点 $x = a$ においては有限な関数値 $f(a)$ を持つから、発散するとすれば $|x| \to \infty$ のときであるが、$|x| \to \infty$ のときは $f(x) \to 0$ となるから、関数 $|f(x)|$ は全域で有限な関数値を持ち、その中から最大値を選ぶことができる。

(定理５)

関数 $f(x)$ が急減少関数であるとき、無限積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ が収束する。

(証明)

関数 $f(x)$ が急減少関数であるから、$|x| \to \infty$ のとき $|(1+x^2)f(x)| \to 0$ である。$|(1+x^2)f(x)|$ は最大値Kを持つので式(4)が成り立つ。

$$|(1+x^2)f(x)| \leqq K \qquad (4)$$

式(4)を代入して式(5)のように計算する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2)f(x)| \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\leqq \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2K\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad (5)$$

式(6)と置くと式(7)が成り立ち、xの0から∞までの区間は $\theta$ の0から $\frac{\pi}{2}$ までの区間に対応する。

$$x = \tan\theta \qquad (6)$$
$$dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \qquad (7)$$

式(5)に式(6)、式(7)を代入すると、式(8)のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \leqq 2K\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$
$$= 2K\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2K \cdot \frac{\pi}{2} = K\pi \qquad (8)$$

式(8)は積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ が式(9)を満足することを示しており、収束することを意味する。

$$0 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \leqq K\pi \qquad (9)$$

絶対値の積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ が収束するので、積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ も収束する。

(定理６)

関数 $f(x)$ が急減少関数であるとき、k階導関数 $f^{(k)}(x)$ も急減少関数である。

(証明)

$|x| \to \infty$ のとき $x^m\{f^{(k)}\}^{(n)} \to 0$ となることが、式(10)の計算からわかる。

$$x^m\{f^{(k)}\}^{(n)} = x^m f^{(k+n)}(x) \to = 0 \qquad (10)$$