超関数1

2016年12月6日
小林　保

(1) 成分表示

関数擬値で式(1)のように表される超関数$i(x)$を超関数1と呼ぶ。

$$i(x)=1 \qquad (1)$$

式(1)の表現は関数値1の普通の定数関数と同じであり、超関数1と呼ぶことがふさわしい。関数配列で表すと式(2)のようになる。

$$i(x)=(1、0、0、0、\cdots) \qquad (2)$$

左連続成分以外の全ての成分は0であり、左連続成分は1である。

(2) 左連続成分と同じ近似関数

式(1)、式(2)の超関数$i(x)$の左連続成分$i_h(x)$は式(3)のように表される。

$$i_h(x)=1 \qquad (3)$$

式(1)、式(2)の超関数$i(x)$については式(4)を満足する式(5)の$I(x)$を近似関数として用いることができる。

$$i_h(x)=I(x) \qquad (4)$$

$$I(x)=1 \qquad (5)$$

式(5)の$I(x)$は独立変数xに関して定数関数であるが、近似変数εに関しても定数関数である。式(5)の$I(x)$を式(6)、式(7)、式(8)に代入すれば成分が計算される。

$$i_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} I(x-\rho) \qquad (6)$$

$$i_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{I(x+\rho)-I(x-\rho)\} \qquad (7)$$

$$i_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}I(t)\,dt$$
$$(n=1、2、3、\cdots) \qquad (8)$$

式(9)の$I(x)$を式(6)、式(7)、式(8)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)の超関数$i(x)$が得られ、式(9)は式(5)と同等な近似関数である。

$$I(x)=1+\varepsilon x^n \quad (n=0、1、2、\cdots) \qquad (9)$$

非負整数nを変動させると、式(9)は無数に多くの関数を表すから、同等な近似関数は無数に多く存在する。式(9)で$\varepsilon\to 0$の極限を考えると式(10)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)=1 \qquad (10)$$

式(10)の関数$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)$は式(5)の関数$I(x)$と同じである。

(3) 無限大における急減少

関数$\phi(x)$が無限回微分可能で任意の非負整数数mとnを用いて、$|x|\to\infty$のとき$|x^m\phi^{(n)}(x)|\to 0$であるとき、関数$\phi(x)$は無限大における急減少であるという。急減少という用語は減少と言う用語と似ているが意味がかなり異なるので注意が必要である。減少は$a<b$のとき$f(a)>f(b)$を意味し、独立変数の増加に伴う従属変数の減少を意味する。急減少は独立変数の極限変動に伴う従属変数の0への収束を意味する。$|x|\to\infty$のとき$|x^m|\to\infty$であるが$|\phi^{(n)}(x)|\to 0$であり、$|\phi^{(n)}(x)|$が$|x^m|$に打ち勝って、全体として$|x^m\phi^{(n)}(x)|\to 0$になっている。勝つ$|\phi^{(n)}(x)|$が急減少、負ける$|x^m|$が緩増加である。

式(11)を式(6)、式(7)、式(8)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)の超関数$i(x)$が得られ、式(11)は式(5)と同等な近似関数である。

$$I(x)=\exp(-\varepsilon^2 x^2) \qquad (11)$$

式(11)の関数$I(x)$は近似変数εを適当に小さな値に固定したとき、無限大における急減少である。式(12)は式(5)と同等な近似関数であり、自然数nを変動させると、無数に多くの関数を表す。

$$I(x)=\exp(-\varepsilon^2 x^{2n}) \quad (n=1、2、3、\cdots) \qquad (12)$$

式(12)で$\varepsilon\to 0$の極限を考えると式(10)が成り立つ。式(10)の関数$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)$は式(5)の関数$I(x)$と同じである。

(4) 点における急減少

関数$\phi(x)$が無限回微分可能で、$|x-a|\to 0$のとき、$\left|\frac{1}{(x-a)^m}\phi^{(n)}(x)\right|\to 0$ならば、点$x=a$において関数$\phi(x)$は急減少であると言う。ここで、$m$と$n$は任意の非負整数である。$|x-a|\to 0$のとき、$\left|\frac{1}{(x-a)^m}\right|\to\infty$であるが、$|\phi^{(n)}(x)|\to 0$であり、$|\phi^{(n)}(x)|$が$\left|\frac{1}{(x-a)^m}\right|$に打ち勝って、全体として$\left|\frac{1}{(x-a)^m}\phi^{(n)}(x)\right|\to 0$になっている。勝つ$|\phi^{(n)}(x)|$が急減少、負ける$\left|\frac{1}{(x-a)^m}\right|$が緩増加である。点$x=a$における急減少関数の定義域は必ずしも実数全域である必要はなく、点$x=a$を含む区間であれば良い。$a=0$とおけば、点$x=0$における急減少が定義される。

式(13)、式(14)を式(6)、式(7)、式(8)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)の超関数$i(x)$が得られ、式(13)、式(14)は式(5)と同等な近似関数である。

$$I(x)=\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{x^2}\right) \quad (x\neq 0) \qquad (13)$$

$$I(x)=0 \qquad (x=0) \qquad (14)$$

式(13)は点$x=0$において関数値を持たないが、式(15)が成り立つので式(14)と滑らかに接続する。

$$\lim_{x\to 0} I(x)=0 \qquad (15)$$

式(13)、式(14)の関数$I(x)$は近似変数εを適当に小さな値に固定したとき、点$x=0$における急減少である。式(13)、式(14)の右辺のxを$x-a$に置き換えれば、点$x=a$における急減少が得られる。式(16)、式(14)は式(13)、式(14)と同等な近似関数であり、自然数nを変動させると、無数に多くの関数を表す。

$$I(x)=\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{x^{2n}}\right) \quad (x\neq 0) \quad (n=1、2、3、\cdots) \qquad (16)$$

式(16)、式(14)で$\varepsilon\to 0$の極限を考えると式(17)、式(18)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)=1 \quad (x\neq 0) \qquad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)=0 \quad (x=0) \qquad (18)$$

式(17)、式(18)の関数$\lim_{\varepsilon\to 0} I(x)$は点$x=0$で不連続であり、式(5)の関数$I(x)$と同じでない。