# 超関数方程式x・f(x)＝1のコーシーの主値を用いた解

2016年9月17日

小林　保

## (1) 関数方程式と超関数方程式

式(1)の方程式が未知の関数f(x)についての方程式とすれば、式(2)が解である。

$$x\cdot f(x)=1 \qquad (1)$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (2)$$

数値0で割り算することはできないから、点x＝0は式(2)の定義域外であり、議論の対象外である。区間x≠0においては数値xで割り算することができ、式(2)の解が求まる。式(1)の方程式が未知の超関数f(x)についての方程式とするとき、超関数方程式を解いてみよう。

## (2) 超関数方程式を汎関数的に解く

方程式には等号＝が用いられている。方程式を解くためには、方程式の両辺に同じ操作を施す。施す操作が同じであれば、操作を施した後も、等号＝が維持される。

未知の超関数f(x)についての式(1)の方程式を汎関数的な記号で記述すると、式(3)になる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{x\cdot f(x)\}\cdot\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\phi(x)\,dx \qquad (3)$$

ライトヒルの教科書[1)]の28頁の定理9は、超関数f(x)について式(4)が成り立てば、ディラック関数$\delta(x)$と任意定数Cを用いて、式(5)が成り立つと、説明している。

$$x\cdot f(x)=0 \qquad (4)$$

$$f(x)=C\cdot\delta(x) \qquad (5)$$

式(4)と式(5)から式(6)が得られる。

$$C\cdot x\cdot\delta(x)=0 \qquad (6)$$

式(6)を用いると、超関数方程式(3)は式(7)のように変形される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{x\cdot f(x)\}\cdot\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{1+C\cdot x\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)\,dx \qquad (7)$$

式(3)の両辺の被積分関数をxで割り算すれば、式(8)のように変形され、解の超関数が求まる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\frac{1}{x}+C\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)\,dx \qquad (8)$$

式(8)は式(9)を意味する。

$$f(x)=\frac{1}{x}+C\cdot\delta(x) \qquad (9)$$

## (3) コーシーの主値

新井の教科書[2)]は超関数$\frac{1}{x}$についてコーシーの主値による定義に95頁の例4で言及している。入力関数$\phi(x)$とし、関数$\frac{1}{x}$の積分不能な点x＝0を含む区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$を積分区間から、除外する。$\varepsilon\to 0$としても積分$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$が収束し、超関数を定義することができる。定義された超関数をp.v.$\frac{1}{x}$と表示する。

## (4) 積分可能性

式(7)から式(8)への変形のときに式(2)を考慮せず、積分区間$-\infty<x<+\infty$をそのままにして良いか疑問である。式(2)を考慮せずに式(7)から式(8)へ変形するためには、超関数$\frac{1}{x}$が関数$\frac{1}{x}$と異なり、点x＝0において積分可能でなければならない。新井の教科書[2)]がコーシーの主値に言及しているのは、超関数$\frac{1}{x}$と関数$\frac{1}{x}$を同一視する試みと思われる。超関数$\frac{1}{x}$の点x＝0における積分可能の議論を回避できる。

## (5) 超関数方程式を主値を用いて解く

式(7)の両辺の積分区間を区間$-\infty<x<+\infty$から区間$|x|>\varepsilon$に変更すると式(10)が得られる。

$$\int_{|x|>\varepsilon}\{x\cdot f(x)\}\cdot\phi(x)\,dx$$

$$=\int_{|x|>\varepsilon}\{1+C\cdot x\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)\,dx \qquad (10)$$

式(10)の両辺の被積分関数を関数xで割り算すると、式(11)が得られる。

$$\int_{|x|>\varepsilon}f(x)\cdot\phi(x)\,dx$$

$$=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{|x|>\varepsilon}\{C\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)\,dx$$

$$=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (11)$$

積分区間から点x＝0が除外されているので、積分区間内で$\delta(x)=0$であるから、式(11)の第2辺の第2項は0である。式(11)の両辺について$\varepsilon\to 0$の極限を考えると、式(12)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}f(x)\cdot\phi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad (12)$$

式(12)の右辺が収束するから、式(12)が超関数方程式(3)のコーシーの主値を用いた解である。

式(12)は式(13)を意味する。

$$\mathrm{p.v.}\,f(x)=\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x} \qquad (13)$$

## (6) 超関数の定義域

記号p.v.が汎関数の積分区間から点x＝0を除外することを意味するから、式(13)と式(2)の実質的な意味は同じである。超関数p.v.$\frac{1}{x}$の定義域は区間x≠0である。コーシーの主値は汎関数的な体裁であっても、ふつうの関数と同じ式(2)の性質を示す。

点x＝0を定義域に含む超関数$\frac{1}{x}$が定義できれば式(9)の性質を示す。

## 参考文献


1)　M.J.ライトヒル著、高見穎郎訳、フーリエ解析と超関数、ダイヤモンド社、1975年

2)　新井仁之著、新・フーリエ解析と関数解析学、培風館、2010年