［質問］超関数$\frac{1}{x}$の基本列

2016年9月5日
小林　保

(1) 準備　ディラック関数δ(x)の性質
　ライトヒルの教科書[1)]の28頁の定理9は、超関数f(x)について式(1)が成り立てば、ディラック関数δ(x)と任意定数Cを用いて、式(2)が成り立つと、説明している。

$$x\cdot f(x)=0 \tag{1}$$

$$f(x)=C\cdot\delta(x) \tag{2}$$

式(1)と式(2)から式(3)が得られる。

$$C\cdot x\cdot\delta(x)=0 \tag{3}$$

　ディラック関数δ(x)の関数値について、ライトヒルの教科書[1)]の33頁の例題11に式(4)が成り立つと説明されている。

$$\delta(x)=0 \qquad (x\neq 0) \tag{4}$$

(2) 関数$\frac{1}{x}$
　未知の関数f(x)についての式(5)の方程式の解が関数$\frac{1}{x}$である。

$$x\cdot f(x)=1 \tag{5}$$

数値0で割り算することはできないから、点x＝0は関数$\frac{1}{x}$の定義域外であり、議論の対象外である。区間x≠0においては数値xで割り算することができ、関数$\frac{1}{x}$が定義され、式(6)が得られる。

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \tag{6}$$

(3) 超関数$\frac{1}{x}$
　超関数$\frac{1}{x}$の定義について、ライトヒルの教科書[1)]の48頁の定義14に次のように説明されている。式(5)の方程式を満足する奇の超関数f(x)が超関数$\frac{1}{x}$である。f(x)が式(5)の解であるとき、式(1)の方程式の解を加えた f(x)+C・δ(x) も式(5)の解である。定数Cの任意性から式(5)は無数に多くの解を持つが、その内に奇な超関数が1つだけあるので、それを超関数$\frac{1}{x}$と定義する。区間x≠0においては、超関数$\frac{1}{x}$は式(6)の関数$\frac{1}{x}$と一致する。未知の超関数f(x)についての式(5)の方程式の解は式(7)で表される。

$$f(x)=\frac{1}{x}+C\cdot\delta(x) \tag{7}$$

(4) 定義域の違い
　式(4)が成り立つから、区間x≠0に限れば、式(6)と式(7)を区別する意味が無い。従って、敢えてライトヒルの教科書[1)]が、未知の超関数f(x)についての式(5)の方程式の解を、式(6)ではなく式(7)であると記述しているのは、点x＝0における状態に着目しているからであると推測され、式(7)の超関数f(x)の定義域に点x＝0が含まれると推測される。超関数$\frac{1}{x}$と関数$\frac{1}{x}$は区間x≠0において一致する。関数$\frac{1}{x}$の定義域は点x＝0を含まないが、超関数$\frac{1}{x}$の定義域は点x＝0を含む。

(5) 特異点の状態の説明
　ライトヒルの教科書[1)]の24頁の例題6はディラック関数δ(x)の1つの基本列を式(8)で示している。

$$\delta_n(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\exp(-nx^2) \tag{8}$$

ライトヒルの教科書[1)]の2頁の図2は式(8)の関数δ_n(x)のn＝4、n＝20、n＝100の場合について図示している。関数δ_n(x)は点x＝0に頂点を持つ山形であり、裾野はx軸に漸近する。nの増大に伴って山は高く細くなる。n→∞とすれば関数値δ_n(0)が発散し、点x＝0はディラック関数δ(x)の特異点である。n→∞としなければ関数値δ_n(0)が存在し、関数δ_n(x)は点x＝0においても滑らかである。点x＝0の付近の関数δ_n(x)の変動がディラック関数δ(x)の特異点x＝0の状態を近似的に説明する。
　一般に、超関数の特異点の状態を説明するためには、基本列を提示すれば良い。特異点付近の基本列の変動が超関数の特異点の状態を近似的に説明する。同等な多数の基本列が存在するが、それらの共通の性質を調べることにより、超関数の特異点の状態を窺い知ることができる。

(6) 超関数の定義の原則
　ライトヒルの教科書[1)]は基本列を用いて超関数を定義する。23頁の定義3で基本列を定義し、定義4で同等な基本列を定義し、定義5で超関数を定義する。ライトヒルの教科書[1)]の48頁の定義14は超関数$\frac{1}{x}$を定義するとき、式(5)の方程式を用い、基本列を提示していない。基本列を用いて超関数を定義する原則から逸脱しており、ライトヒルの教科書[1)]は一貫性がない。基本列を提示しないために、ライトヒルの教科書[1)]は超関数$\frac{1}{x}$の特異点x＝0の状態を説明できない。

(7) 質問
　超関数$\frac{1}{x}$を定義する基本列を提示してください。同等な多数の基本列が存在するが、少なくとも1つを提示してください。ライトヒルの教科書[1)]の2頁の図2と同じように図示してください。番号nを適当に大きな整数に固定すれば、点x＝0においても基本列の関数値が存在し、点x＝0付近において基本列の関数は滑らかなはずである。基本列が提示されれば、超関数$\frac{1}{x}$の特異点のx＝0の状態を説明することができ、式(6)と式(7)を区別する意味が明らかになる。

参考文献
1)　M.J.ライトヒル著、高見穎郎訳、フーリエ解析と超関数、ダイヤモンド社、1975年