1次の基本集中関数の特異点の状態

2016年1月12日

小林　保

(1) 1次の基本集中関数の成分表示

式(1)、式(2)のように擬値表示される超関数$\beta_1(x)$を1次の基本集中関数と言う。

$$\beta_1(x) = \uparrow\!\!\!\rightarrow \qquad (x=0) \qquad (1)$$

$$\beta_1(x) = 0 \qquad (x\neq 0) \qquad (2)$$

超関数$\beta_1(x)$を配列表示すれば式(3)、式(4)ののようになる。

$$\beta_1(x) = (0, 0, 1, 0, \cdot\cdot\cdot) \qquad (x=0) \qquad (3)$$

$$\beta_1(x) = (0, 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot) \qquad (x\neq 0) \qquad (4)$$

点x＝0は特異点であり、1次成分$\beta_{11}(0)$が0でない値を持つ。

式(5)の関数$B_1(x)$は1次の基本集中関数$\beta_1(x)$の近似関数の1つである。

$$B_1(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (5)$$

近似関数$B_1(x)$を式(6)、式(7)、式(8)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)の超関数$\beta_1(x)$が得られる。

$$\beta_{1h}(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} B_1(x-\rho) \qquad (6)$$

$$\beta_{1d}(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{B_1(x+\rho)-B_1(x-\rho)\} \qquad (7)$$

$$\beta_{1n}(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}B_1(t)\,dt$$

$$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot) \qquad (8)$$

式(6)、式(7)、式(8)は近似変数εと点径変数ρを用いている。

(2) 特異点の状態

超関数$\beta_1(x)$の特異点x＝0は、近似関数$B_1(x)$の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$に対応する。式(5)の近似関数$B_1(x)$を図示すると図-1のようになる。式(5)

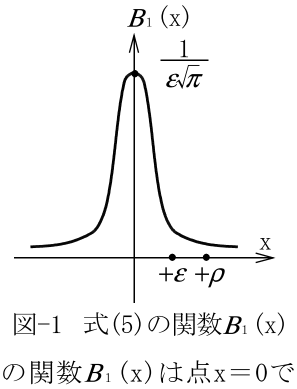

図-1　式(5)の関数$B_1(x)$

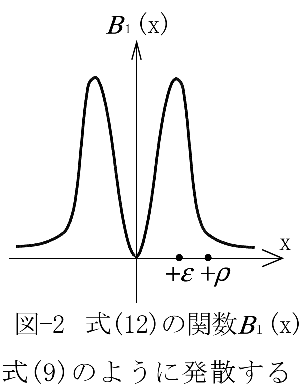

図-2　式(12)の関数$B_1(x)$

の関数$B_1(x)$は点x＝0で式(9)のように発散するばかりでなく、点$x=+\varepsilon$でも式(10)のように発散する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_1(0) = +\infty \qquad (9)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_1(+\varepsilon) = +\infty \qquad (10)$$

近似変数εが点径変数ρより速く0に近づくから式(11)と仮定しても一般性を失わない。

$$\varepsilon < \rho \qquad (11)$$

点域の端点$x=+\rho$においては式(12)のように収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_1(+\rho) = 0 \qquad (12)$$

点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$の内側では式(9)、式(10)と同じように+∞に発散し、点域の端点では式(12)のように0に収束し、点域の外側では式(12)と同じように0に収束する。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$において、+∞に発散したり、0に収束したりするような激しい変動が生じている。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動のために、1次成分$\beta_{11}(0)$が0でない値を持つことになる。式(5)の近似関数$B_1(x)$の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動の状態が式(1)、式(2)の超関数$\beta_1(x)$の特異点x＝0の状態を説明する。

(3) 同等な近似関数

式(13)の関数$B_1(x)$も式(6)、式(7)、式(8)にに代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)の超関数$\beta_1(x)$が得られる。

$$B_1(x) = \frac{2x^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (13)$$

式(5)と式(13)は同じ超関数を近似するので同等な近似関数と言う。式(13)を図示すると図-2のようになる。式(13)は2点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$とに極大値を持ち点x＝0に極小値を持つ。近似変数εが点径変数ρより速く0に近づくから式(11)と仮定しても一般性を失わない。

式(13)の近似関数$B_1(x)$は点x＝0で式(14)のように収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_1(0) = 0 \qquad (14)$$

式(13)の近似関数$B_1(x)$は式(10)、式(12)が成り立つ。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$において、+∞に発散したり、0に収束したりするような激しい変動が生じている。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動のために、1次成分$\beta_{11}(0)$が0でない値を持つことになる。式(13)の近似関数$B_1(x)$の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動の状態が式(1)、式(2)の超関数$\beta_1(x)$の特異点x＝0の状態を説明する。

同等な近似関数は無数に多く存在する。式(15)も式(5)と同等な近似関数である。

$$B_1(x) = -\frac{4x^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\{1-(\frac{x}{\varepsilon})^2\}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \qquad (15)$$

点域の内側の区間$-\rho < x < +\rho$の中に$B_1(x)=0$の点が式(13)はは1個、(15)は3個あるが、式(5)は1個もない。