超関数1／xの特異点の状態

2016年1月9日

小林　保

(1) 超関数$\frac{1}{x}$の成分表示

式(1)のように擬値表示される超関数g(x)を超関数$\frac{1}{x}$と言う。

$$g(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \tag{1}$$

式(1)の右辺は、式(2)の左辺を計算した結果であり、記号↱や⊥→が見えなくなっている。式(1)の表現は普通の関数と超関数の区別を曖昧にする。擬値表示は曖昧でも構わないときに用いる。

$$\frac{1}{x}\cdot 1+0\cdot ↱ +0\cdot ⊥→ +0\cdot ⊥→^{2}+\cdot\cdot\cdot=\frac{1}{x} \tag{2}$$

式(1)の超関数g(x)を配列表示すれば式(3)のようになる。

$$g(x)=\left(\frac{1}{x}、0、0、0、\cdot\cdot\cdot\right) \qquad (x\neq 0) \tag{3}$$

点x＝0は特異点であり、定義域外である。

式(4)の関数G(x)は超関数g(x)の近似関数の1つである。

$$G(x)=\frac{1}{x} \qquad (-\infty < x\leqq -\rho、+\rho\leqq x<+\infty) \tag{4}$$

近似関数G(x)を式(5)、式(6)、式(7)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(3)が得られる。

$$g_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} G(x-\rho) \tag{5}$$

$$g_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{G(x+\rho)-G(x-\rho)\} \tag{6}$$

$$g_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}G(t)\,dt \qquad (n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot) \tag{7}$$

式(5)、式(6)、式(7)は近似変数εと点径変数ρを用いている。

(2) 特異点の状態

式(5)、式(6)、式(7)にx＝0を代入すると、成分$g_h(0)$、$g_d(0)$、$g_1(0)$、$g_2(0)$、・・・が収束しないから、点x＝0は超関数g(x)の定義域外である。超関数g(x)の特異点x＝0は、近似関数G(x)の点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$に対応する。式(4)の近似関数G(x)を図示すると、図-1のようになる。

近似関数G(x)は式(8)、式(9)のように発散する。

$$\lim_{x\to +0} G(x)=+\infty \tag{8}$$

$$\lim_{x\to -0} G(x)=-\infty \tag{9}$$

式(8)、式(9)の発散は点x＝0の近くで生じるので点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$の内部で生じる。式(8)、式(9)の発散のために、点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$は近似関数G(x)の定義域から除外される。式(4)の近似関数G(x)の点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$における式(8)、式(9)の発散の状態が、式(1)、式(3)のは超関数g(x)の特異点x＝0の状態を説明する。

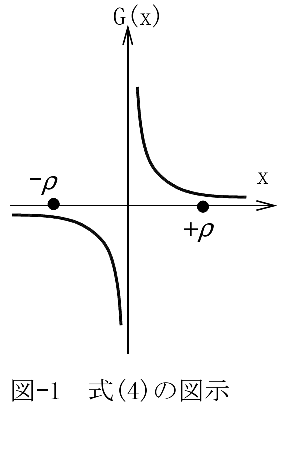

図-1　式(4)の図示

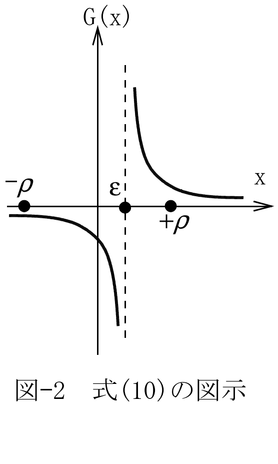

図-2　式(10)の図示

(3) 同等な近似関数

式(10)の関数G(x)も式(5)、式(6)、式(7)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(3)が得られる。

$$G(x)=\frac{1}{x-\varepsilon} \qquad (-\infty < x\leqq -\rho、+\rho\leqq x<+\infty) \tag{10}$$

式(10)と式(4)は同じ超関数g(x)を近似するので、同等な近似関数と言う。式(10)を図示すると、図-2のようになる。式(10)の近似関数G(x)は式(11)、式(12)のように発散する。

$$\lim_{x\to \varepsilon+0} G(x)=+\infty \tag{11}$$

$$\lim_{x\to \varepsilon-0} G(x)=-\infty \tag{12}$$

近似変数εの極限変動と関係無く式(11)、式(12)は発散する。発散する点$x=\varepsilon$は極限変動$\varepsilon\to 0$に伴って点x＝0に収束する。式(10)の近似関数G(x)は式(13)を満足する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{式(10)のG(x)\}=式(4)のG(x) \tag{13}$$

近似変数εが点径変数ρより速く0に近づくから式(14)と仮定しても一般性を失わない。

$$\varepsilon<\rho \tag{14}$$

式(11)、式(12)の発散は点$x=\varepsilon$の近くで生じるので、式(14)のもとで、点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$の内部で生じる。式(11)、式(12)の発散のために、点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$は近似関数G(x)の定義域から除外される。式(10)の近似関数G(x)の点域$-\rho\leqq x\leqq +\rho$における式(11)、式(12)の発散の状態が、式(1)、式(3)の超関数g(x)の特異点x＝0の状態を説明する。

同等な近似関数は無数に多く存在する。式(15)、(16)も式(4)と同等な近似関数である。

$$G(x)=\frac{1+\varepsilon}{x} \qquad (-\infty < x\leqq -\rho、+\rho\leqq x<+\infty) \tag{15}$$

$$G(x)=\frac{1}{x}+\varepsilon \qquad (-\infty < x\leqq -\rho、+\rho\leqq x<+\infty) \tag{16}$$

式(10)、式(15)、(16)の近似関数G(x)は近似変数εを含むが、式(4)の近似関数G(x)は近似変数εを含まない。式(4)の近似関数G(x)は近似変数εに関して定数関数と考える。