# 超関数$\frac{1}{x}$とディラック関数の特異点の状態

2015年12月13日
小林　保

## (1) 超関数$\frac{1}{x}$の成分表示

　式(1)、式(2)のように擬値表示される超関数$g(x)$を超関数$\frac{1}{x}$と言う。

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0) \qquad (1)$$

$$g(x) = (\text{不定義}) \qquad (x = 0) \qquad (2)$$

式(1)の右辺は式(3)の左辺を計算した結果である。

$$\frac{1}{x} \cdot 1 + 0 \cdot \quad + 0 \cdot \quad + 0 \cdot \quad {}^{2} + \cdot\cdot\cdot = \frac{1}{x} \qquad (3)$$

点x＝0は特異点であり、定義域外である。

　式(4)の関数G(x)は超関数g(x)の近似関数の1つである。

$$G(x) = \frac{1}{x} \qquad (-\infty < x \leqq -\rho,\ +\rho \leqq x < +\infty) \qquad (4)$$

近似関数G(x)を式(5)、式(6)、式(7)に代入して成分を計算すれば、式(1)、式(2)が得られる。

$$g_h(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} G(x-\rho) \qquad (5)$$

$$g_d(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \{G(x+\rho) - G(x-\rho)\} \qquad (6)$$

$$g_n(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1} G(t)\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot) \qquad (7)$$

## (2) ディラック関数$\delta(x)$の成分表示

　式(8)、式(9)のように擬値表示される超関数$\delta(x)$をディラック関数と言う。

$$\delta(x) = \qquad (x = 0) \qquad (8)$$

$$\delta(x) = 0 \qquad (x \neq 0) \qquad (9)$$

式(8)の右辺は式(10)の左辺を計算した結果である。

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot \quad + + 1 \cdot \quad + 0 \cdot \quad {}^{2} + \cdot\cdot\cdot = \qquad (10)$$

点x＝0は特異点であり、1次成分$\delta_1(0)$が0でない値を持つ。

　式(11)の関数$\Delta(x)$はディラック関数$\delta(x)$の近似関数の1つである。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad (11)$$

近似関数$\Delta(x)$を式(12)、式(13)、式(14)に代入して成分を計算すれば、式(8)、式(9)の超関数$\delta(x)$が得られる。

$$\delta_h(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(x-\rho) \qquad (12)$$

$$\delta_d(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \{\Delta(x+\rho) - \Delta(x-\rho)\} \qquad (13)$$

$$\delta_n(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1} \Delta_1(t)\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot) \qquad (14)$$

## (3) 超関数$\frac{1}{x}$の特異点の状態

　式(5)、式(6)、式(7)にx＝0を代入すると、成分$g_h(0)$、$g_d(0)$、$g_1(0)$、$g_2(0)$、・・・が収束しないから、点x＝0は超関数g(x)の定義域外である。超関数g(x)の特異点x＝0は、近似関数G(x)の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$に対応する。式(4)の近似関数G(x)を図示すると、図-1のようになる。

近似関数G(x)は式(15)、式(16)のように発散する。

$$\lim_{x\to+0} G(x) = +\infty \qquad (15)$$

$$\lim_{x\to-0} G(x) = -\infty \qquad (16)$$

式(15)、式(16)の発散は点x＝0の近くで生じるので点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$の内部で生じる。式(15)、式(16)の発散のために、点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$は近似関数G(x)の定義域から除外される。式(4)の近似関数G(x)の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における式(15)、式(16)の発散の状態が、式(1)、式(2)の超関数g(x)の特異点x＝0の状態を説明する。

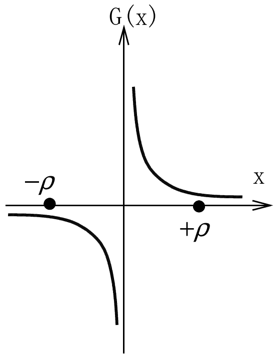


図-1　式(4)の図示

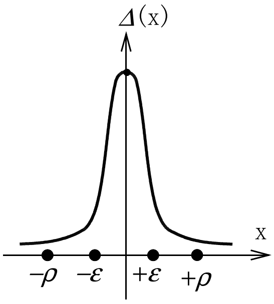


図-2　式(11)の図示

## (4) ディラック関数$\delta(x)$の特異点の状態

　ディラック関数$\delta(x)$の特異点x＝0は、近似関数$\Delta(x)$の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$に対応する。式(11)の近似関数$\Delta(x)$を図示すると図-2のようになる。式(11)の関数$\Delta(x)$は点x＝0で式(17)のように発散するばかりでなく、点$x=+\varepsilon$でも式(18)のように発散する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(0) = +\infty \qquad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(+\varepsilon) = +\infty \qquad (18)$$

式(18)で$\varepsilon \fallingdotseq 0$かつ$\varepsilon \neq 0$であることに注意する。近似変数$\varepsilon$が点経変数$\rho$より速く極限変動するから、$\varepsilon < \rho$と仮定しても一般性を失わない。点域の端点$x=+\rho$においては式(19)のように収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(+\rho) = 0 \qquad (19)$$

式(17)、式(18)の$+\infty$への発散は点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$の内側$-\rho < x < +\rho$で生じ、点域の外側では式(19)の0への収束が生じている。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$において、$+\infty$へ発散したり、0へ収束したり、激しく変動している。点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動のために、1次成分$\delta_1(0)$が0でない値を持つことになる。式(11)の近似関数$\Delta(x)$の点域$-\rho \leqq x \leqq +\rho$における激しい変動の状態が式(8)、式(9)のディラック関数$\delta(x)$の特異点x＝0の状態を説明する。

## (5) 特異点の違い

　式(4)の近似関数G(x)と式(11)の近似関数$\Delta(x)$は点x＝0の付近で発散することは類似しているが、発散の状態は全く異なっている。式(15)、式(16)は近似変数$\varepsilon$の変動と関係なく発散するが、式(17)、式(18)は近似変数$\varepsilon$の変動に伴って発散する。この違いを区別して、成分表示型の理論は、式(2)、式(8)のように表示することができる。超関数$\frac{1}{x}$とディラック関数$\delta(x)$を足し算することはできるが、区間$x \neq 0$が和の超関数の定義域である。