超関数を導入する状況

2015年11月14日
小林　保

(1) 多くの人が知っている状況

道路や鉄道が川を横断するとき、橋が架けられる。日常的に人々が道路や鉄道を利用し、橋を見て知っている。橋を観察することから議論を始めれば、多くの人が状況を理解すると期待される。橋を単純化して丸木橋を想定する。この報告は、丸木橋に作用する荷重について検討し、超関数を導入する。

丸木橋の図を示す。点Bと点Cが川岸であり、直

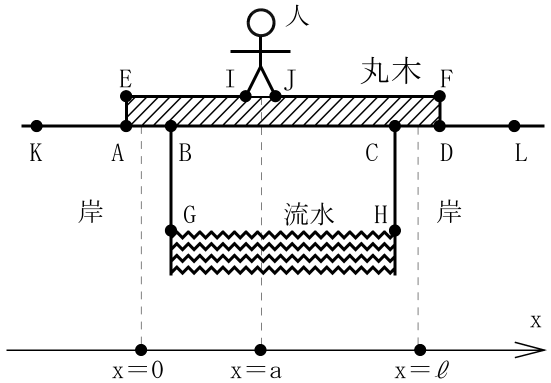

図　丸木橋

線KAと直線DLが丸木橋に続く地表である。直線GHが川の流水の表面である。長さABと長さCDは非常に短いのでそれぞれを1つの点と認識する。位置を表すために座標xを設定し、点ABの位置を$x=0$、点CDの位置を$x=\ell$とする。座標xの単位は長さmである。丸木橋の長さがℓmである。長さAEが丸木の直径を表わし、丸木の直径は一定と想定する。丸木の直径AEは丸木の長さℓに比べて非常に短いので捨象し、丸木を直線と認識する。人が丸木橋を歩いている。直線IJの範囲が人であるが、長さIJは非常に短いので1つの点と認識する。点IJの位置を$x=a$とする。

(2) 単位の異なる荷重

人の重さが下向きの力となって丸木橋に作用する。力の単位はNである。橋に作用する力を荷重という。人の荷重は点$x=a$に大きさP･Nの力が作用すると認識される。丸木の重さも下向きの力となって丸木橋に作用する。丸木は橋そのものであるから丸木の荷重は自重と呼ばれる。丸木の荷重は点$x=0$から点$x=\ell$の範囲に均等に作用するので単位長さ当たりの力W･N/mと認識される。人の荷重は単位Nと認識され、丸木の荷重は単位N/mと認識され、単位が異なっている。

(3) 集中荷重と分布荷重

点xに作用する人の荷重をg(x)で表すと式(1)、式(2)で表される。

$$g(x)=P \qquad (x=a) \qquad (1)$$

$$g(x)=0 \qquad (0\leqq x<a,\ a<x\leqq \ell) \qquad (2)$$

人の荷重は$x=a$にだけ作用し、他の点には作用しないので集中荷重と呼ばれる。集中荷重は式(1)、式(2)のように離散関数で表される。点xに作用する丸木の荷重をh(x)で表すと式(3)で表される。

$$h(x)=W \qquad (0\leqq x\leqq \ell) \qquad (3)$$

丸木の荷重は橋の全区間$0\leqq x\leqq \ell$に分散して分布しているので分布荷重と呼ばれる。分布荷重は式(3)のように連続関数で表される。

(4) 単純でない分布

分布は分布の場と分布する量を明示して説明される。丸木橋は太さを捨象して直線と認識され、1次元空間である。丸木橋に作用する荷重は分布であり、分布の場が座標xで表される1次元空間、分布する量が人の荷重g(x)と丸木の自重h(x)である。分布する量が単位の異なる2つであり、単純でない分布である。人の荷重g(x)と丸木の自重h(x)のそれぞれは分布であるが、単位が1つで単純であり、関数で表される。

(5) 成分表示の導入

人の荷重g(x)と丸木の荷重h(x)は単位が異なっているが、荷重として類似の作用を丸木に及ぼし、密接な関係があるので、統合して表示することを試みる。統合した荷重f(x)は人の荷重g(x)と丸木の荷重h(x)を重ね合わせたものであるが、単純な足し算ではない。単位を添えて式(4)のように表す。

$$f(x)\cdot N/m=h(x)\cdot N/m+g(x)\cdot N \qquad (4)$$

離散関数g(x)は微分や積分の対象にならないので、連続関数h(x)を代表と考え、統合した荷重f(x)に単位N/mを添える。式(4)を単位N/mで割り算すると式(5)が得られる。

$$f(x)=h(x)\cdot 1+g(x)\cdot m \qquad (5)$$

式(5)の右辺はベクトル表現と考えることができ、記号1と記号mが基底ベクトルであり、記号mは長さの単位の意味を失っている。式(5)を数ベクトルの表現に書き換えると、式(6)が得られる。

$$f(x)=\{h(x),g(x)\} \qquad (6)$$

式(5)、式(6)の右辺の表現におけるh(x)、g(x)を成分と言う。

(6) 微分可能な近似関数

成分g(x)は微分や積分の対象にならないが、補助変数εを含む式(7)の関数G(x)は微分や積分の対象になる。

$$G(x)=\frac{P}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x-a}{\varepsilon})^2\} \qquad (7)$$

$\varepsilon>0$である。式(7)の関数G(x)から、補助変数ρを用いて、式(8)の計算により式(1)、式(2)の関数g(x)が得られる。

$$g(x)=\lim_{\rho\to 0}(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}G(t)dt) \qquad (8)$$

$\rho>0$である。補助変数ρは補助変数εより遅く極限変動する。関数G(x)を関数g(x)の近似関数と言う。近似関数G(x)を介して関数g(x)を微分や積分の対象にすると、記号f(x)が微分や積分の対象になり、超関数と呼ばれる。式(7)以外にも式(8)を満足する近似関数G(x)は無数に多く存在する。(8)を満足する近似関数G(x)を互いに同等であると言う。

(7) 類似の状況

この報告では橋を例示して説明したが、その他にも類似の状況は多いと思われる。単純でない分布が存在する。単位が異なるが密接な関連があり、統合して取り扱うことが合理的な状況がある。離散関数と連続関数を統合して取り扱うことが合理的な状況がある。このような状況を検討するために、数学的な方法として、超関数を用いることができる。