[質問]超関数$\frac{1}{x}$の特異点の状態

2015年11月1日
小林　保

(1) 準備　$x\cdot\delta(x)=0$

ディラック関数$\delta(x)$と関数xの積$x\cdot\delta(x)$は超関数である。急減少関数$\phi(x)$を用いて式(1)とおき、超関数$x\cdot\delta(x)$の性質を式(2)のように計算して調べる。

$$\psi(x)=x\cdot\phi(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\{x\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\{x\cdot\phi(x)\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\psi(x)dx\\&=\psi(0)=0\cdot\phi(0)=0\end{aligned} \tag{2}$$

式(2)の第1辺では入力関数$\phi(x)$であるが、第3辺では入力関数$\psi(x)$である。第3辺から第4辺への計算に式(3)が用いられる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx=\phi(0) \tag{3}$$

式(3)はライトヒルの教科書[1)]の24頁の例題6に説明されている。第4辺から第5辺への計算は式(1)にx＝0を代入している。結局、式(4)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{x\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)dx=0 \tag{4}$$

式(4)は式(5)を意味し、超関数$x\cdot\delta(x)$は関数値0の定数関数である。

$$x\cdot\delta(x)=0 \tag{5}$$

(2) 準備　$\delta(x)=0\ (x\neq0)$

ディラック関数$\delta(x)$の関数値について、ライトヒルの教科書[1)]の33頁の例題11に次のように説明されている。入力関数$\phi(x)$が式(6)の性質を持つと仮定すると、式(7)が成り立つ。

$$\phi(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq0) \tag{6}$$

$$\phi(0)=0 \tag{7}$$

式(3)と式(7)を合わせ考えると式(8)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx=0 \tag{8}$$

式(6)を用いると式(9)のように計算される。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{0}\delta(x)\cdot\phi(x)dx+\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{0}\delta(x)\cdot0\cdot dx+\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx\\&=\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx\end{aligned} \tag{9}$$

式(8)と式(9)を合わせ考えると式(10)が成り立つ。

$$\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\cdot\phi(x)dx=0 \tag{10}$$

式(10)は式(11)を意味する。

$$\delta(x)=0 \qquad (0<x<+\infty) \tag{11}$$

式(6)の代わりに式(12)を仮定し、式(7)～式(10)と同じように計算すると、式(11)の代わりに式(13)が得られる。

$$\phi(x)=0 \qquad (0\leqq x<+\infty) \tag{12}$$

$$\delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \tag{13}$$

式(11)、式(13)は式(14)を意味する。

$$\delta(x)=0 \qquad (x\neq0) \tag{14}$$

(3) 関数$\frac{1}{x}$

未知の関数f(x)についての式(15)の方程式の解が関数$\frac{1}{x}$である。

$$x\cdot f(x)=1 \tag{15}$$

数値0で割り算することはできないから、点x＝0は関数$\frac{1}{x}$の定義域外であり、議論の対象外である。区間x≠0においては数値xで割り算することができ、関数$\frac{1}{x}$が定義され、式(16)が得られる。

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq0) \tag{16}$$

(4) 超関数$\frac{1}{x}$

超関数$\frac{1}{x}$の定義について、ライトヒルの教科書[1)]の48頁の定義14に次のように説明されている。式(15)の方程式を満足する奇の超関数f(x)が超関数$\frac{1}{x}$である。式(15)の方程式の左辺は式(5)と定数Cを用いて式(17)のように変形される。

$$\begin{aligned}x\cdot f(x)&=x\cdot f(x)+0=x\cdot f(x)+C\cdot x\cdot\delta(x)\\&=x\cdot\{f(x)+C\cdot\delta(x)\}\end{aligned} \tag{17}$$

f(x)が式(15)の解であるとき、式(17)によれば、$f(x)+C\cdot\delta(x)$も式(15)の解である。定数Cの任意性から式(15)は無数に多くの解を持つが、その内に奇な超関数が1つだけあるので、それを超関数$\frac{1}{x}$と定義する。区間x≠0においては、超関数$\frac{1}{x}$は式(16)の関数$\frac{1}{x}$と一致する。未知の超関数f(x)についての式(15)の方程式の解は式(18)で表される。

$$f(x)=\frac{1}{x}+C\cdot\delta(x) \tag{18}$$

(5) 質問

筆者は上記の超関数$\frac{1}{x}$の定義についての説明が理解できない。式(14)が成り立つから、区間x≠0に限れば、式(16)と式(18)を区別する意味が無い。従って、敢えてライトヒルの教科書[1)]が、未知の超関数f(x)についての式(15)の方程式の解を、式(16)ではなく式(18)であると記述しているのは、点x＝0における状態に着目しているからであると推測され、式(18)の超関数f(x)の定義域に点x＝0が含まれると推測される。超関数$\frac{1}{x}$と関数$\frac{1}{x}$は区間x≠0において一致する。関数$\frac{1}{x}$の定義域は点x＝0を含まないが、超関数$\frac{1}{x}$の定義域は点x＝0を含む。しかし、ライトヒルの教科書[1)]には、超関数$\frac{1}{x}$の点x＝0における状態について特段の説明がない。式(16)と式(18)を区別する意味を明らかにするために、特段の説明が必要である。超関数$\frac{1}{x}$の点x＝0における状態について詳しく説明してください。

参考文献

1)　M.J.ライトヒル著、高見穎郎訳、フーリエ解析と超関数、ダイヤモンド社、1975年