不定積分と原始関数

2015年10月7日
小林　保

(1) 微分に関連する用語

　横軸に独立変数xをとり、縦軸に従属変数yをとり、関数y＝f(x)を図示すると、曲線が得られる。定点x＝aにおける曲線の接線の傾きf′(a)を微分係数と呼ぶ。微分係数を求める演算を「微分する」と言う。定数aを変動させて独立変数xに置き換えたf′(x)は導関数と呼ばれる。導関数を求める演算も「微分する」と言う。微分係数と導関数を区別せずに演算を「微分する」と言うが、許容の範囲と思われる。

　式(1)が成り立つとき、関数g(x)を関数f(x)の原始関数と言う。

$$g'(x)=f(x) \tag{1}$$

定数Cを用いて式(2)が成り立つから、原始関数は定数Cに起因するの不確定性を持つ。

$$\{g(x)+C\}'=g'(x)+0=f(x) \tag{2}$$

関数g(x)が原始関数の１つであり、不確定性を含まないとき、関数g(x)+Cも原始関数である。不確定性を含む原始関数を記号$f^{(-1)}(x)$で表すと、式(3)が成り立つ。

$$f^{(-1)}(x)=g(x)+C \tag{3}$$

原始関数の不確定性を定数Cが担う。定数Cの不確定性を伴って原始関数を求める演算を「積分する」と言う。

(2) 積分に関連する用語

　横軸に独立変数xをとり、縦軸に従属変数yをとり、関数y＝f(x)を図示すると、曲線が得られる。f(x)＞0の区間で、曲線と3本の直線x＝a、x＝b、y＝0で囲まれた図形の面積$\int_a^b f(x)dx$を定積分と呼ぶ。f(x)＜0の区間については、面積に負号を付ける。点x＝aを定積分の下端、点x＝bを定積分の上端と言う。下端と上端を一致させると、定積分は式(4)のように0になる。

$$\int_a^a f(x)dx=0 \tag{4}$$

定積分を求める演算を「積分する」と言う。定積分の下端aはそのままにし、上端bを変動させて独立変数xに置き換えた$\int_a^x f(t)dt$を不定積分と言う。被積分関数f(x)の独立変数xを変数tに置き換えている。不定積分は下端aに起因する不確定性を持つ。下端aの不確定性をを伴って不定積分を求める演算も「積分する」と言う。定積分と不定積分を区別せずに演算を「積分する」と言うが、許容の範囲と思われる。

(3) 微分積分学の基本定理

　関数f(x)の不定積分を微分すると式(5)が成り立つ。

$$\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}'=f(x) \tag{5}$$

式(5)は微分積分学の基本定理と呼ばれ、不定積分と原始関数を結びつける。式(5)により、原始関数と不定積分を区別せずに演算を「積分する」と言うようになった。

　式(5)は不定積分が原始関数あることを示している。しかし、原始関数が不定積分であることを示している訳ではない。関数f(x)の不定積分と原始関数の集合は式(6)の包含関係が成り立つ。

$$\text{原始関数の集合} \supset \text{不定積分の集合} \tag{6}$$

原始関数$f^{(-1)}(x)$には定数Cだけの不確定性があり、不定積分$\int_a^x f(t)dt$には定数aだけの不確定性がある。式(6)は成り立つが、式(7)の等式が成り立たない場合がある。

$$\text{原始関数の集合} = \text{不定積分の集合} \tag{7}$$

式(7)が成り立たない場合には、定数Cの不確定性が定数aの不確定性より大きい。式(7)が成り立たない場合には、原始関数と不定積分を区別せずに演算を「積分する」と言うのは許容されない。

　式(8)の関数について式(9)、式(10)が成り立つ。

$$f(x)=1 \tag{8}$$

$$f^{(-1)}(x)=x+C \tag{9}$$

$$\int_a^x f(t)dt=x-a \tag{10}$$

C＝−aとすれば式(9)の定数Cと式(10)の定数aの不確定性が一致し、式(7)が成り立つ。

　式(11)の関数について式(12)、式(13)が成り立つ。

$$f(x)=0 \tag{11}$$

$$f^{(-1)}(x)=C \tag{12}$$

$$\int_a^x f(t)dt=0 \tag{13}$$

定数aをどのように選んでも、式(13)は不確定性を持たず、式(12)は定数Cの不確定性を持つ。式(11)の関数については式(7)が成り立たない。

　式(14)の関数について式(15)、式(16)が成り立つ。

$$f(x)=x \tag{14}$$

$$f^{(-1)}(x)=\frac{1}{2}x^2+C \tag{15}$$

$$\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2 \tag{16}$$

定数aをどのように選んでも、$-\frac{1}{2}a^2\leqq 0$であり、定数Cに比べて不確定性が小さい。式(14)の関数については式(7)が成り立たない。

(4) 点における演算と区間における演算

　微分係数を求める演算は定点x＝aにおける演算である。定数aを変動させて独立変数xに置き換えるので、導関数を求める演算も点における演算である。導関数を求める演算の逆演算であるから、原始関数を求める演算も点における演算である。定積分を求める演算は区間a≦x≦bにおける演算である。上端bを変動させて独立変数xに置き換えるので、不定積分を求める演算も区間における演算である。

　原始関数と不定積分は、元々は別個の演算であった。原始関数を求める演算は点における演算であり、不定積分を求める演算は区間における演算である。両者の性質はかなり異なっている。元々「積分する」は不定積分を求める演算であった。式(7)が成り立たない場合には、原始関数を求める演算を「積分する」と言うと誤解を招く。元々は別個の演算であったことを忘れないために、原始関数を求める演算を「逆微分する」と言うのが良い。超関数の積分について検討するとき、混乱を避けるために、原始関数と不定積分を区別するのが良い。