［質問］コーシーの主値による超関数の定義

2015年6月27日
小林　保

(1) 汎関数型の収束

超関数$\frac{1}{x}$を定義するために、急減少関数$\phi(x)$を用いて式(1)の汎関数が収束することが必要である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \qquad (1)$$

式(1)の被積分関数$\phi(x)\cdot\frac{1}{x}$が、点x＝0において積分不能であるから、式(1)の汎関数が収束しないが、教科書[1)]には主値を用いれば収束すると説明がある。式(2)の主値ついての説明があるが、式(1)の主値の計算について詳しい説明はない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot dx \qquad (2)$$

また、超関数$\frac{1}{x^2}$を定義するために、急減少関数$\phi(x)$を用いて式(3)の汎関数が収束することが必要であるが、式(3)の収束についての説明も見当たらない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx \qquad (3)$$

(2) 主値

式(2)の収束について、R､S →∞、ε､ζ→0となる４つの極限変数R､S､ε､ζを用いて、式(4)のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}dx &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\lim_{S\to\infty}\lim_{\zeta\to 0}\int_{\zeta}^{S}\frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon-\lim_{R\to\infty}\log R\\ &\qquad +\lim_{S\to\infty}\log S-\lim_{\zeta\to 0}\log\zeta\\ &= \lim_{R\to\infty}\lim_{S\to\infty}\log\frac{S}{R}+\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\zeta\to 0}\log\frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad (4)\end{aligned}$$

式(4)の最後辺の第1項は、２つの極限変数R、Sが独立に変動すれば収束しないが、比$\frac{S}{R}$を一定に保って変動すれば収束する。式(4)の最後辺の第2項は、２つの極限変数ε、ζが独立に変動すれば収束しないが、比$\frac{\varepsilon}{\zeta}$を一定に保って変動すれば収束する。比$\frac{S}{R}$と比$\frac{\varepsilon}{\zeta}$を一定に保って変動すれば、式(4)が収束する。この収束した式(4)をコーシーの主値と言う。

式(1)の収束について式(2)の収束が参考になるとすれば、式(3)の収束について式(5)の収束が参考になると期待される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot dx \qquad (5)$$

式(4)と同じように、R､S →∞、ε､ζ→0となる４つの極限変数R､S､ε､ζを用いて、式(6)のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx+\lim_{S\to\infty}\lim_{\zeta\to 0}\int_{\zeta}^{S}\frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}\right)-\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{-R}\right)\\ &\qquad +\lim_{S\to\infty}\left(-\frac{1}{S}\right)-\lim_{\zeta\to 0}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)\\ &= -\lim_{R\to\infty}\lim_{S\to\infty}\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{R}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\zeta}\right)\\ &= 0+0+\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\zeta}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\zeta\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\zeta}\right)=+\infty \qquad (6)\end{aligned}$$

式(6)の最後辺は、極限変動ε､ζ→0に伴って+∞に発散する。主値を用いて計算すれば収束するわけではない。

(3) 質問

主値を用いて式(2)が収束しても、式(1)が収束するとは限らない。式(1)について、主値を用いて収束する計算について、詳しく説明してください。

式(5)が式(6)のように発散するので、式(3)の収束について式(5)は参考にならない。式(3)について、主値を用いて収束する計算について、詳しく説明してください。

参考文献

1)　篠崎寿夫、松森徳衛、松浦武信著、デルタ関数入門、現代工学社、1983年