超関数方程式$x \cdot f(x)=1$

2015年6月14日

小林　保

(1) 表示についての注意

超関数$f(x)$を未知とする式(1)の超関数方程式の右辺は擬値表示である。

$$x \cdot f(x)=1 \qquad (1)$$

式(1)の右辺を配列表示すれば、式(2)のようになる。

$$x \cdot f(x)=(1,0,0,0,\cdots) \qquad (2)$$

式(1)の右辺の1は、式(3)の左辺の擬値表示について計算を完了した結果の形であり、記号 や が見えなくなっている。

$$1 \cdot 1+0 \cdot \ +0 \cdot \ +0 \cdot \ ^2+\cdots=1 \qquad (3)$$

式(1)、式(2)の左辺は関数xと超関数$f(x)$の積である。超関数と超関数の積は定義されないが、関数と超関数の積は定義されるので、式(1)、式(2)は意味を持つ。成分表示型の理論においては、数値についても式(3)のような擬値表示を想起すべき場合があるので注意が必要である。

(2) 成分と近似関数

式(1)、式(2)の右辺を超関数$g(x)$とし、成分$g_h(x)$、$g_d(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$、・・・とすれば、式(4)、式(5)、式(6)である。

$$g_h(x)=1 \qquad (4)$$

$$g_d(x)=0 \qquad (5)$$

$$g_n(x)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (6)$$

未知の超関数$f(x)$の近似関数$F(x)$とし、成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・とする。超関数$g(x)$の近似関数$G(x)$とすると、式(1)、式(2)は式(7)を意味している。

$$x \cdot F(x)=G(x) \qquad (7)$$

式(7)を用いて計算すると、式(8)、式(9)、式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}
g_h(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} G(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\\
&=x\cdot f_h(x) \qquad (8)\\
g_d(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{G(x+\rho)-G(x-\rho)\}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{(x+\rho)\cdot F(x+\rho)-(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{(x+\rho)\cdot F(x+\rho)-(x+\rho)F(x-\rho)\\
&\qquad +(x+\rho)F(x-\rho)-(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[(x+\rho)\cdot\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}+2\rho\cdot F(x-\rho)]\\
&=x\cdot f_d(x) \qquad (9)\\
g_n(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}G(t)\,dt\\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\cdot t\cdot F(t)\,dt\\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\{(t-x)^{n}+x\cdot(t-x)^{n-1}\}\cdot F(t)\,dt\\
&=f_{n+1}(x)+x\cdot f_n(x) \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (10)
\end{aligned}$$

(3) 成分の方程式

式(4)と式(8)から式(11)が得られる。

$$x \cdot f_h(x)=1 \qquad (11)$$

$x=0$のとき、式(11)は不能である。$x\neq 0$のとき、式(12)が成り立つ。

$$f_h(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (12)$$

式(11)が$x=0$のとき不能であるから、点$x=0$は超関数$f(x)$の定義域外であり、$x=0$について$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・も計算しない。

式(5)と式(9)から式(13)が得られる。

$$x \cdot f_d(x)=0 \qquad (13)$$

$x=0$について計算しないから、式(14)が得られる。

$$f_d(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (14)$$

式(6)と式(10)から式(15)が得られる。

$$f_{n+1}(x)+x\cdot f_n(x)=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (15)$$

$x=0$について計算しないから、取り敢えず$f_1(x)$を未定定数として、式(16)が成り立つ。

$$f_{n+1}(x)=(-x)^n\cdot f_1(x) \qquad (x\neq 0) \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (16)$$

もし、$f_1(x)$が0でなければ、$n=1,2,3,\cdots$の全てのnについて$f_n(x)$が0でない値を持つことになる。0でない値を持つ成分は有限個に限定されるから、未定定数$f_1(x)$について、式(17)が成り立たなければならない。

$$f_1(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (17)$$

式(17)を式(16)に代入すれば式(18)が成り立つ。

$$f_n(x)=0 \quad (x\neq 0) \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad (18)$$

(4) 解の成分と近似関数

式(12)、式(14)、式(17)、式(18)を用いて超関数$f(x)$を配列表示すれば、式(19)が得られる。

$$f(x)=\left(\frac{1}{x},0,0,0,\cdots\right) \quad (x\neq 0) \qquad (19)$$

擬値表示すれば、式(20)が得られる。

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \qquad (20)$$

式(1)、式(2)の超関数方程式の解は式(19)、式(20)の超関数$f(x)$で表される。超関数$f(x)$の定義域は区間$-\infty<x<0$、$0<x<\infty$である。点$x=0$は定義域外であり、議論の対象にしない。

超関数$f(x)$の近似関数は無数に多く存在する。式(21)、式(22)はその例である。

$$F(x)=\frac{1}{x} \qquad (-\infty<x\leqq-\rho,\ +\rho\leqq x<\infty) \qquad (21)$$

$$F(x)=\frac{1+\varepsilon}{x} \qquad (-\infty<x\leqq-\rho,\ +\rho\leqq x<\infty) \qquad (22)$$

近似関数$F(x)$の定義域は点半径変数ρを含んで示されるので、区間$-\infty<x\leqq-\rho$、$+\rho\leqq<x<\infty$と表示される。