超関数方程式x・f(x)＝0

2015年6月14日
小林　保

(1) 表示についての注意

超関数f(x)を未知とする式(1)の超関数方程式の右辺は擬値表示である。

$$x\cdot f(x)=0 \qquad (1)$$

式(1)の右辺を配列表示すれば、式(2)のようになる。

$$x\cdot f(x)=(0,0,0,0,\cdots) \qquad (2)$$

式(1)の右辺の0は、式(3)の左辺の擬値表示について計算を完了した結果の形であり、記号 や が見えなくなっている。

$$0\cdot 1+0\cdot \ +0\cdot \ +0\cdot \ ^{2}+\cdots=0 \qquad (3)$$

式(1)、式(2)の左辺は関数xと超関数f(x)の積である。超関数と超関数の積は定義されないが、関数と超関数の積は定義されるので、式(1)、式(2)は意味を持つ。成分表示型の理論においては、数値についても式(3)のような擬値表示を想起すべき場合があるので注意が必要である。

(2) 成分と近似関数

式(1)、式(2)の右辺を超関数g(x)とし、成分$g_h(x)$、$g_d(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$、・・・とすれば、式(4)、式(5)、式(6)である。

$$g_h(x)=0 \qquad (4)$$
$$g_d(x)=0 \qquad (5)$$
$$g_n(x)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (6)$$

未知の超関数f(x)の近似関数F(x)とし、成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・とする。超関数g(x)の近似関数G(x)とすると、式(1)、式(2)は式(7)を意味している。

$$x\cdot F(x)=G(x) \qquad (7)$$

式(7)を用いて計算すると、式(8)、式(9)、式(10)が得られる。

$$\begin{aligned} g_h(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} G(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\\ &=x\cdot f_h(x) \qquad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_d(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{G(x+\rho)-G(x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{(x+\rho)\cdot F(x+\rho)-(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{(x+\rho)\cdot F(x+\rho)-(x+\rho)F(x-\rho)\\ &\qquad +(x+\rho)F(x-\rho)-(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[(x+\rho)\cdot\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}+2\rho\cdot F(x-\rho)]\\ &=x\cdot f_d(x) \qquad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}G(t)\,dt\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\cdot t\cdot F(t)\,dt\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\{(t-x)^{n}+x\cdot(t-x)^{n-1}\}\cdot F(t)\,dt\\ &=f_{n+1}(x)+x\cdot f_n(x) \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (10)\end{aligned}$$

(3) 成分の方程式

式(4)と式(8)から式(11)が得られる。

$$x\cdot f_h(x)=0 \qquad (11)$$

x≠0のとき、式(12)が成り立つ。

$$f_h(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (12)$$

x＝0のとき、式(11)は不定であるが、成分$f_h(x)$は左連続であるから、式(12)を用いて式(13)で計算され、式(14)が成り立つ。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0} f_h(x-\rho) \qquad (13)$$
$$f_h(x)=0 \qquad (x=0) \qquad (14)$$

式(5)と式(9)から式(15)が得られる。

$$x\cdot f_d(x)=0 \qquad (15)$$

x≠0のとき、式(16)が成り立つ。

$$f_d(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (16)$$

x＝0のとき、式(15)は不定であるが、成分$f_d(x)$は式(12)を用いて式(17)で計算され、式(18)が成り立つ。

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0} f_h(x+\rho)-f_h(x) \qquad (17)$$
$$f_d(x)=0 \qquad (x=0) \qquad (18)$$

式(6)と式(10)から式(19)が得られる。

$$f_{n+1}(x)+x\cdot f_n(x)=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (19)$$

取り敢えず$f_1(x)$を未定定数として、式(19)から式(20)が成り立つ。

$$f_n(x)=(-x)^n\cdot f_1(x) \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad (20)$$

x＝0のとき、式(21)が成り立つ。

$$f_n(x)=0 \quad (x=0) \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad (21)$$

未定定数Cを用いて式(22)とする。

$$f_1(x)=C \quad (x=0) \qquad (22)$$

x≠0のとき、もし、$f_1(x)$が0でなければ、n＝1、2、3、・・・の全てのnについて$f_n(x)$が0でない値を持つことになる。0でない値を持つ成分は有限個に限定されるから、未定定数$f_1(x)$について、式(23)が成り立たなければならない。

$$f_1(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (23)$$

式(23)を式(20)に代入すれば式(24)が成り立つ。

$$f_n(x)=0 \quad (x\neq 0) \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad (24)$$

(4) 解の成分

式(14)、式(18)、式(22)、式(21)を用いて超関数f(x)を配列表示すれば、式(25)のようになる。

$$f(x)=(0,0,C,0,\cdots) \quad (x=0) \qquad (25)$$

式(12)、式(16)、式(23)、式(24)を用いて超関数f(x)を配列表示すれば、式(26)のようになる。

$$f(x)=(0,0,0,0,\cdots) \quad (x\neq 0) \qquad (26)$$

超関数f(x)を擬値表示すれば、式(27)、式(28)のようになる。

$$f(x)=C\cdot \qquad (x=0) \qquad (27)$$
$$f(x)=0 \qquad (x=0) \qquad (28)$$

ディラック関数$\delta(x)$を配列表示すれば、式(29)、式(30)のようになる。

$$\delta(x)=(0,0,1,0,\cdots) \quad (x=0) \qquad (29)$$
$$\delta(x)=(0,0,0,0,\cdots) \quad (x\neq 0) \qquad (30)$$

式(25)、式(26)、式(29)、式(30)から、式(31)が成り立つ。

$$f(x)=C\cdot\delta(x) \qquad (31)$$

式(1)、式(2)の超関数方程式の解は、式(25)、式(26)の超関数f(x)、式(27)、式(28)の超関数f(x)、式(31)の超関数f(x)で表される。超関数f(x)の定義域は実数全域の$-\infty<x<\infty$である。