多項式で表された近似関数の発見

2015年2月11日
小林　保

(1) 定積分の集中

　ディラック関数$\delta(x)$は、点x＝0に大きさ1の量が集中している状況を表す。区間$-0 \leqq x \leqq +0$は点x＝0と同じと考えて良いから、積分で式(1)と表すことが適切である。

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x)\,dx = 1 \qquad (1)$$

式(1)は点x＝0における積分であるから、定積分の集中と呼ぶ。定積分の集中を直感的に理解するために、式(2)、式(3)の柱状関数$\Delta(x)$で近似するのが良い。

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \qquad (-\varepsilon < x < \varepsilon) \qquad (2)$$

$$\Delta(x) = 0 \qquad (x \leqq -\varepsilon、\varepsilon \leqq x) \qquad (3)$$

式(2)、式(3)の関数$\Delta(x)$を図示すると図-1のようになる。

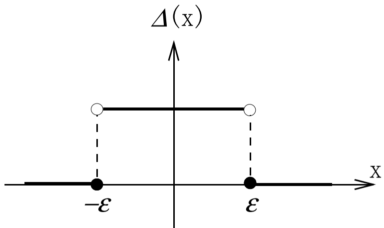

図-1 柱状関数の図示

　式(2)、式(3)の関数$\Delta(x)$はディラック関数$\delta(x)$の定積分の集中をうまく説明できる。区間$-\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$は極限$\varepsilon \to 0$のとき、区間$-0 \leqq x \leqq +0$に収束する。式(2)、式(3)の関数$\Delta(x)$は式(4)を満足する。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x)\,dx = 1 \qquad (4)$$

極限$\varepsilon \to 0$のとき、$\Delta(x) \to \delta(x)$となり、式(4)が式(1)を説明する。しかし、式(2)、式(3)の関数$\Delta(x)$はディラック関数$\delta(x)$の微分可能性をうまく説明できない。ディラック関数$\delta(x)$は無限回微分可能であるのに、関数$\Delta(x)$は２点　$x=-\varepsilon$, $x=\varepsilon$において不連続であり、微分不能である。

(2) 微分可能性

　ディラック関数$\delta(x)$の微分可能性を直感的に理解するために、式(5)の正規関数$\Delta(x)$で近似するのが良い。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad (5)$$

式(5)の関数$\Delta(x)$を図示すると図-2のようになる。

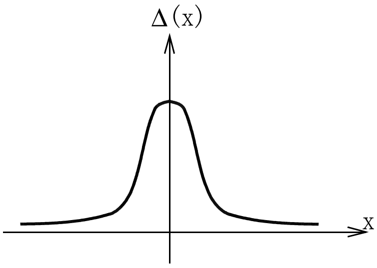

図-2 正規関数の図示

　式(5)の関数$\Delta(x)$は無限回微分可能であり、ディラック関数$\delta(x)$の微分可能性をうまく説明できる。しかし、式(5)の近似関数$\Delta(x)$は式(4)が成立せず、定積分の集中をうまく説明できない。式(4)を計算するために、式(6)を計算する。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) dx \qquad (6)$$

式(7)の変数変換すると、式(8)が成り立つ。

$$\frac{x}{\varepsilon} = \frac{z}{\sqrt{2}} \qquad (7)$$

$$dx = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz \qquad (8)$$

$x=-\varepsilon$が$z=-\sqrt{2}$に対応し、$x=+\varepsilon$が$z=+\sqrt{2}$に対応するから、式(9)のように計算される。

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x)\,dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= 2\int_{0}^{+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \qquad (9)\end{aligned}$$

式(9)の最後辺の中の被積分関数が平均値0、標準偏差1の正規分布関数であるから、$\sqrt{2}=1.41$として関数表から0.4207を求め、式(10)のように計算される。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x)\,dx = 2 \times 0.4207 = 0.841 \qquad (10)$$

$\varepsilon \to 0$の極限を考えても、式(10)から式(4)は得られない。

(3) 多項式で表された近似関数

　式(11)、式(12)の関数$\Delta(x)$は、定積分の集中と微分可能性の両方をうまく説明できる。

$$\Delta(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n!)^2\, 2^{2n+1} \varepsilon^{2n+1}} (x-\varepsilon)^n (x+\varepsilon)^n \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad (11)$$

$$\Delta(x) = 0 \qquad (x \leqq -\varepsilon、\varepsilon \leqq x) \qquad (12)$$

式(11)、式(12)の関数$\Delta(x)$を図示すると、図-3のようになる。

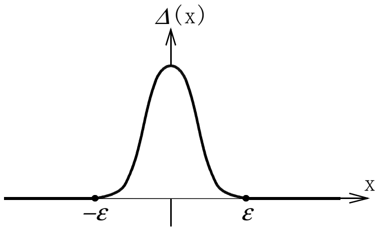

図-3　多項式の図示

式(11)、式(12)の近似関数$\Delta(x)$は、式(2)、式(3)の関数近似関数$\Delta(x)$と同じように、式(4)が成り立ち、ディラック関数$\delta(x)$の定積分の集中をうまく説明でる。しかも式(5)の近似関数$\Delta(x)$と同じように、ディラック関数$\delta(x)$の微分可能性をうまく説明できる。式(11)、式(12)は２点　$x=-\varepsilon$, $x=\varepsilon$における接続の状態に注目すると、n-1回微分可能であるから、数値nを適当に大きな自然数に固定しておけば、必要な回数の微分可能である。