荷重分布の観察から着想した成分表示

2015年1月28日
小林　保

(1) 荷重分布の記述

　長さℓの単純梁に分布荷重、集中荷重、集中モーメントの３種類の荷重が作用した状況は図のようになる。

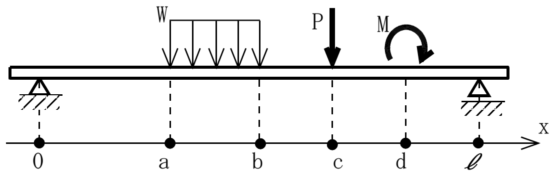

図　３種類の荷重

うになる。材軸線に沿って座標xを設定し、左端x＝0、右端x＝ℓとする。座標xは長さであるから、単位mとする。点x＝aから点x＝bまでに大きさWの等分布荷重が作用し、点x＝cに集中荷重Pが作用し、点x＝dに集中モーメントMが作用している。

　分布荷重Wは単位がN/mであり、構造力学では図に示すように平行な多くの細い矢印で表される。集中荷重Pは単位がNであり、太い矢印で表され、集中モーメントMは単位がNmであり、太い弧矢印で表される。

(2) 連続関数を用いた分布の表現

　分布荷重を関数$f_r(x)$で表すと、区間a＜x＜bで大きさWであり、式(1)のように表される。

$$f_r(x)=W \quad (a<x<b) \tag{1}$$

式(2)の積分W(b-a)が分布荷重の合計である。

$$W(b-a)=\int_a^b f_r(x)\,dx \tag{2}$$

区間x＜a、b＜xにおいては、分布荷重がないので、分布荷重$f_r(x)$は式(3)で表される。

$$f_r(x)=0 \quad (x<a、c<x) \tag{3}$$

2点x＝a、x＝bを除くと、分布荷重$f_r(x)$は式(1)、式(3)のように連続関数で表すことができる。

(3) 段差の表現における一義性の保持

　点x＝aにおいては、式(3)の数値0から式(1)の数値Wに急増しており、数値$f_r(a)$を0、$\frac{1}{3}W$、$\frac{1}{2}W$、W、・・・ の何れとも、決め難い。 独立変数xの値を1つ決めると、それに応じて、従属変数f(x)の値が１つ決まることが関数の定義であり、関数の一義性と言う。数値$f_r(a)$を決められないので、密度分布$f_r(x)$は、点x＝aにおいて普通の関数としては、関数の一義性を保持しない。点x＝aを段差点と呼ぶ。点x＝bにおいて、式(1)の数値Wから式(3)の数値0に急減しており、点x＝bも段差点である。

　関数の一義性を維持するために、段差点の表現について成分を導入する。点x＝aの直近の左側を点x＝a-0、右側を点x＝a+0と略記する。関数値$f_r(a-0)$、$f_r(a+0)$が存在し、一義性を保持している。式(4)で左連続成分$f_h(a)$、式(5)で段差成分$f_d(a)$を定義する。

$$f_h(a)=f_r(a-0) \tag{4}$$

$$f_d(a)=f_r(a+0)-f_r(a-0) \tag{5}$$

点 , で区切って成分を並べ、括弧（ ）で包んで、質量密度$f_0(x)$を式(6)のように表す。

$$f_0(a)=\{f_h(a),f_d(a)\} \tag{6}$$

式(6)は従属変数が$f_h(a)$と$f_d(a)$の2つ有り、普通の関数ではないが、数ベクトルと同じ表現であり、一義性を保持している。成分$f_h(a)$の単位も成分$f_d(a)$の単位もN/mで同じである。点x＝aにおける関数値$f_r(a)$は決め難いが、関数値$f_0(a)$は式(7)を用いて成分2個で表される。

$$f_0(a)=(0,W) \tag{7}$$

点x＝bにおける関数値$f_0(b)$は式(8)を用いて成分2個で表される。

$$f_0(b)=(W,-W) \tag{8}$$

(4) 連続関数と段差の表現の統合

　区間x≠a、x≠bについても、分布荷重を関数$f_r(x)$から成分表示$f_0(x)$に修正し、式(4)、式(5)、式(6)と同型の式(9)、式(10)、式(11)で分布荷重$f_0(x)$を定義すると、連続関数と段差の表現が統合される。

$$f_h(x)=f_r(x-0) \tag{9}$$

$$f_d(x)=f_r(x+0)-f_r(x-0) \tag{10}$$

$$f_0(x)=\{f_h(x),f_d(x)\} \tag{11}$$

区間x≠a、x≠bにおいては、関数値$f_r(x-0)$、$f_r(x+0)$に加えて関数値$f_r(x)$が存在し、一義性を保持している。区間x≠a、x≠bについて式(9)の計算をすると、式(12)が成り立ち、式(10)の計算をすると、式(13)が成り立つ。

$$f_h(x)=f_r(x) \quad (x≠a、x≠b) \tag{12}$$

$$f_d(x)=0 \quad (x≠a、x≠b) \tag{13}$$

式(9)の左連続成分$f_h(x)$は区間x≠a、x≠bにおいて連続であり、区分的に連続な関数である。式(10)の段差成分$f_d(x)$は離散関数である。

(5) 離散関数を用いた分布の表現

　集中荷重を関数$f_1(x)$で表すと、点x＝cに大きさPの力が集中しているから式(14)が成り立つ。

$$f_1(d)=P \tag{14}$$

区間x≠cにおいては集中荷重が無いから、式(15)が成り立つ。

$$f_1(x)=0 \quad (x≠c) \tag{15}$$

集中荷重の分布$f_1(x)$は式(14)、式(15)の離散関数で表すことができる。

　集中モーメントを関数$f_2(x)$で表すと、点x＝dに大きさMのモーメントが集中しているから式(16)が成り立つ。

$$f_2(d)=M \tag{16}$$

区間x≠dにおいては集中モーメントが無いから、式(17)が成り立つ。

$$f_2(x)=0 \quad (x≠d) \tag{17}$$

集中モーメントの分布$f_2(x)$は式(16)、式(17)の離散関数で表すことができる。

(6) ３種類の荷重の統合

　３種類の荷重の分布を統合して表す関数をf(x)とする。関数f(x)は関数$f_0(x)$と関数$f_1(x)$と関数$f_2(x)$の和であるが、単純な足し算ではない。単位を添えて、式(18)のように表す。

$$f(x)\,N/m=f_0(x)\,N/m+f_1(x)\,N+f_2(x)\,Nm \tag{18}$$

単位N/mが代表であると考え、関数f(x)にも単位N/mを添える。式(18)の両辺を単位N/mで割り算すると、式(19)のようになる。

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)\cdot m+f_2(x)\cdot m^2 \tag{19}$$

式(19)において単位mは、成分$f_0(x)$と成分$f_1(x)$と成分$f_2(x)$を区別する目印になっている。式(19)の$f_0(x)$を0次成分、式(19)の$f_1(x)$を1次成分、式(19)の$f_2(x)$を2次成分と言う。成分を用いると、式(20)のように書き換えられる。

$$f(x)=\{f_0(x),f_1(x),f_2(x)\} \tag{20}$$

式(11)を式(20)に代入すると、式(21)が得られる。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),f_2(x)\} \tag{21}$$

荷重の分布は左連続成分、段差成分、1次成分、2次成分の成分4個の関数で表すことができる。