ディラック関数の特異点に分布する量の数式表現

2014年12月5日
小林　保

(1) 理論の萌芽期における素朴な着想

ディラック関数$\delta(x)$についての理論の萌芽期においては、補助変数$\varepsilon\to 0$のとき、式(1)の近似関数$\Delta(x)$がディラック関数$\delta(x)$を表すと考え、式(2)でディラック関数$\delta(x)$を定義した。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{x}{\varepsilon})^2\} \tag{1}$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(x) \qquad \text{(素朴な着想)} \tag{2}$$

式(1)の近似関数$\Delta(x)$は図-1のように図示される。補助変数εが大の曲線と補助変数εが小の曲線を図示して比べている。

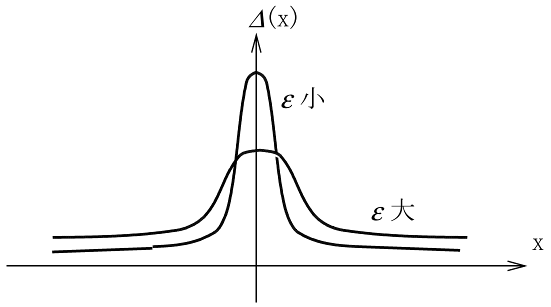

図-1 補助変数εの変動に伴う関数$\Delta(x)$の変化

式(1)の近似関数$\Delta(x)$について、式(3)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,dx=1 \tag{3}$$

ディラック関数$\delta(x)$についての理論の萌芽期においては、(3)の右辺の数値1の量が点x＝0に分布する状況をディラック関数$\delta(x)$が表すと説明した。図-1の曲線は、点x＝0に頂点を持つ山形をしており、x→-∞、x→+∞においてx軸に漸近する。数値1は図-1の曲線とx軸で囲まれた面積である。補助変数$\varepsilon\to 0$のとき、山は高く、細くなっていく。このことから、式(3)の右辺の数値1の量が点x＝0に分布すると考えていた。

式(3)だけを見ると、左辺は区間$-\infty<x<+\infty$における積分であり、区間$-\infty<x<+\infty$に数値1の量が分散して分布すると考えるのが自然である。辛うじて、図-1の助けを借りて、点x＝0と数値1の量を関連付けている。数式だけで、数値1の量を点x＝0と関連付けることができなければ、数学的な厳密さに欠ける。式(3)は補助変数$\varepsilon\to 0$の極限を計算しているが、実際は極限変動と関係無く、式(4)が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,dx=1 \tag{4}$$

(2) 一見矛盾する現象

補助変数εは$\varepsilon\to 0$の極限変動するから、区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$は点x＝0に収束する。式(3)の左辺の積分区間を$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$として、式(5)が成り立つと期待される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=1 \qquad \text{(不成立)} \tag{5}$$

式(5)を計算するために、式(6)を計算する。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\,dx \tag{6}$$

式(7)の変数変換すると、式(8)が成り立つ。

$$\frac{x}{\varepsilon}=\frac{z}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

$$dx=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz \tag{8}$$

$x=-\varepsilon$が$z=-\sqrt{2}$に対応し、$x=+\varepsilon$が$z=+\sqrt{2}$に対応するから、式(9)のように計算される。

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz\\&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})\,dz\\&=2\int_{0}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})\,dz\end{aligned} \tag{9}$$

式(9)の最後辺の中の被積分関数が平均値0、標準偏差1の正規分布関数であるから、$\sqrt{2}=1.41$として関数表から0.4207を求め、式(10)のように計算される。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=2\times 0.4207=0.841 \tag{10}$$

$\varepsilon\to 0$の極限を考えると、式(11)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=0.841 \tag{11}$$

式(5)を期待していたが、結果は式(11)であり、式(5)と式(11)は一見矛盾する。

(3) 特異点における積分

式(5)と式(11)の矛盾は、点x＝0に収束する区間が区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$より大きいことを示唆している。補助変数$\varepsilon$より遅く極限変動する補助変数$\rho$を導入すると、式(12)のように仮定しても一般性を失わない。

$$\varepsilon<\rho \tag{12}$$

区間$-\rho\leqq x\leqq+\rho$は区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$より大きい。補助変数$\varepsilon$を特異化変数、補助変数$\rho$を点半径変数と呼んで区別する。区間$-\rho\leqq x\leqq+\rho$を積分区間とする式(13)が成り立つと期待される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx=1 \tag{13}$$

式(13)を計算するために、式(14)を計算する。

$$\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx=\int_{-\rho}^{+\rho}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\,dx \tag{14}$$

式(15)の変数変換をすると式(16)が得られる。

$$\frac{x}{\varepsilon}=y \tag{15}$$

$$\frac{dx}{\varepsilon}=dy \tag{16}$$

点半径変数ρより先に特異化変数εの極限操作をするから、$\varepsilon\to 0$のとき、$x=-\rho$が$y=-\infty$に対応し、$x=+\rho$が$y=+\infty$に対応する。式(17)のように計算され、式(13)が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{-\rho}^{+\rho}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)\,dx&\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2)\,dy\\&=1\end{aligned} \tag{17}$$

式(13)で補助変数$\rho=+\infty$とすると、式(3)が得られる。式(13)で、$\rho\to 0$の極限変動すると、式(18)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx=1 \tag{18}$$

極限変動$\rho\to 0$のとき、区間$-\rho\leqq x\leqq+\rho$は点x＝0に収束する。式(18)は点x＝0における積分であり、数値1の量が点x＝0に分布することを表現する数式である。