ディラック関数の近似関数の収束と発散

2014年10月13日

小林　保

(1) 理論の萌芽期における素朴な着想

ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$についての理論の萌芽期においては、補助変数$\varepsilon\to 0$のとき、式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$がディラック関数$\delta(\mathrm{x})$を表すと考え、式(2)でディラック関数$\delta(\mathrm{x})$を定義した。

$$\Delta(\mathrm{x})=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\} \qquad (1)$$

$$\delta(\mathrm{x})=\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\mathrm{x}) \qquad \text{（素朴な着想）} \qquad (2)$$

点x＝0において式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は式(3)のように発散する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(1)の}\Delta\}(0)=+\infty \qquad (3)$$

点x＝0において+∞に発散し、式(2)で定義される関数値$\delta(0)$が存在しないから、特異点であると考え、式(4)のように表示した。

$$\delta(\mathrm{x})=+\infty \qquad (\mathrm{x}=0) \qquad \text{（不適切）} \qquad (4)$$

ディラック関数の近似関数は式(1)だけでなく、無数に多く存在する。式(5)や式(6)もディラック関数の近似関数である。

$$\Delta(\mathrm{x})=-\frac{2\mathrm{x}^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\exp\{-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2\} \qquad (5)$$

$$\Delta(\mathrm{x})=-\frac{4\mathrm{x}^2}{\varepsilon^3\sqrt{\pi}}\{1-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2\}\exp\{-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2\} \qquad (6)$$

式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は図-1のように、式(5)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は図-2のように図示される。

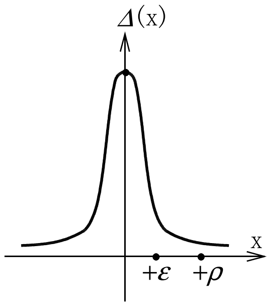

図-1 式(1)の関数$\Delta(\mathrm{x})$

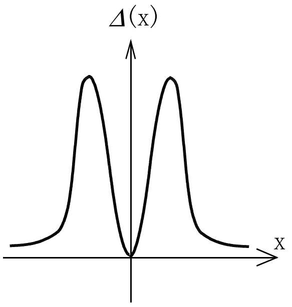

図-2 式(6)の関数$\Delta(\mathrm{x})$

式(1)、式(5)、式(6)の$\Delta(\mathrm{x})$は同等な近似関数と呼ばれる。式(5)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は点x＝0において式(7)が成り立つ。

$$\{\text{式(5)の}\Delta\}(0)=0 \qquad (7)$$

式(7)は補助変数εの極限変動と関係無いから、式(8)のように0に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(5)の}\Delta\}(0)=0 \qquad (8)$$

式(6)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$も点x＝0において、式(9)のように0に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(6)の}\Delta\}(0)=0 \qquad (9)$$

式(8)、式(9)を無視し、式(3)だけを採用して式(4)を導くのは、数学的な厳密さに欠け、不適切である。式(2)も素朴な着想であり、数学的な厳密さに欠ける。

区間x≠0において式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は式(10)のように収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\mathrm{x})=0 \qquad (\mathrm{x}\neq 0) \qquad (10)$$

式(5)、式(6)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$も式(10)が成り立つので、式(11)のように表示したことは適切である。

$$\delta(\mathrm{x})=0 \qquad (\mathrm{x}\neq 0) \qquad (11)$$

(2) 一見矛盾する現象

式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$について、式(12)が成り立ち、式(10)と一見矛盾するように見える。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(1)の}\Delta\}(+\varepsilon)=+\infty \qquad (12)$$

点x＝+εは点x＝0の直ぐ近くにあるが、x≠0である。式(12)と式(10)の矛盾について言及した文献は見当たらない。ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$について、式(12)は点x＝+εが区間x≠0に含まれず、点x＝0に含まれることを示唆している。補助変数εより遅く$\rho\to 0$の極限変動する補助変数ρを導入すると、式(13)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(+\rho)=0 \qquad (13)$$

補助変数εを特異化変数と呼び、補助変数ρを点半径変数と呼んで区別する。式(5)、式(6)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$も、式(13)が成り立つ。点x＝+ρは点x＝0の直ぐ近くにあるが、x≠0であり、式(13)は式(10)と矛盾しない。ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$について、点x＝+ρは区間x≠0に含まれる。

特異化変数εが点半径変数ρより速く極限変動するから、式(14)のように仮定しても一般性を失わない。

$$\varepsilon<\rho \qquad (14)$$

式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$について、点x＝+εを含む区間$-\rho\leqq \mathrm{x}\leqq +\rho$が、ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$の特異点x＝0と対応しており、区間 $\mathrm{x}\leqq-\rho$、$+\rho\leqq \mathrm{x}$ がディラック関数$\delta(\mathrm{x})$の区間x≠0と対応していると考えると、式(12)と式(10)の矛盾が解消する。近似関数$\Delta(\mathrm{x})$の区間$-\rho\leqq \mathrm{x}\leqq +\rho$をディラック関数$\delta(\mathrm{x})$の点x＝0の点域と呼ぶ。

(3) 点の内部変動

任意の定数kを用いて、式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$について、式(15)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(1)の}\Delta\}(\mathrm{k}\varepsilon)=+\infty \qquad (15)$$

定数kは負の値も取り得る。特異化変数εが点半径変数ρより速く変動するから、式(16)のように仮定しても一般性を失わない。

$$-\rho<\mathrm{k}\varepsilon<\rho \qquad (16)$$

式(15)、式(16)は、定数kの任意性のもとで、式(1)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$の点域$-\rho\leqq \mathrm{x}\leqq +\rho$内の全ての点が+∞に発散することを意味する。式(5)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$については、式(17)、式(18)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(5)の}\Delta\}(\mathrm{k}\varepsilon)=+\infty \qquad (\mathrm{k}\neq 0) \qquad (17)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(5)の}\Delta\}(\mathrm{k}\varepsilon)=0 \qquad (\mathrm{k}=0) \qquad (18)$$

式(6)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$については、式(19)、式(20)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(6)の}\Delta\}(\mathrm{k}\varepsilon)=+\infty \qquad (\mathrm{k}\neq-1,\ \mathrm{k}\neq 0,\ \mathrm{k}\neq 1) \qquad (19)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\text{式(6)の}\Delta\}(\mathrm{k}\varepsilon)=0 \qquad (\mathrm{k}=-1,\ \mathrm{k}=0,\ \mathrm{k}=1) \qquad (20)$$

式(17)についてk＝0の1点が例外であり、式(19)についてk＝-1、k＝0、k＝1の3点が例外である。例外の点は多くとも有限個である。式(15)、式(17)、式(18)、式(19)、式(20)を総合すると、式(1)、式(5)、式(6)の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$について、式(21)のように表示することができる。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\mathrm{k}\varepsilon)=+\infty \qquad \text{（例外のk有り）} \qquad (21)$$

点域$-\rho\leqq \mathrm{x}\leqq +\rho$内のほとんど全ての点が+∞に発散することが、ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$の特異点の特徴である。点域内における近似関数の変動を点の内部変動と呼ぶ。式(21)で検討した内部変動が、特異点x＝0の性質を説明する。