超関数の積

2014年6月7日
小林　保

(1) 各点における演算

積は各点における演算である。超関数f(x)の近似関数F(x)と超関数g(x)の近似関数G(x)に対して式(1)の関数J(x)を求める。

$$J(x)=F(x)\cdot G(x) \quad (1)$$

関数J(x)を近似関数として、式(2)～式(4)で成分$j_h(x)$、$j_d(x)$、$j_1(x)$、$j_2(x)$、・・・を求める。

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho) \quad (2)$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{J(x+\rho)-J(x-\rho)\} \quad (3)$$

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt$$

$$(n=1、2、3、・・・) \quad (4)$$

成分を点 , で区切って並べ、括弧 ( ) で包んで式(5)で表されたj(x)を演算の結果と定義する。

$$j(x)=\{j_h(x)、j_d(x)、j_1(x)、j_2(x)、・・・\} \quad (5)$$

式(1)を式(4)に代入するとき、式(6)のように変数xを変数tに置き換えている

$$J(t)=F(t)\cdot G(t) \quad (6)$$

(3) 発散の可能性

式(2)、式(3)は収束するが、式(4)は発散する場合があるので、2つの超関数f(x)、g(x)の積を定義することは、一般的にはできない。例えば、式(1)の近似関数F(x)とG(x)に式(7)の近似関数$\boldsymbol{B}_1(x)$を代入すると、式(8)を得る。

$$\boldsymbol{B}_1(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \quad (7)$$

$$J(x)=\{\boldsymbol{B}_1(x)\}^2 \quad (8)$$

式(8)の関数J(x)を式(4)に代入し、点x＝0における第1次成分$j_1(0)$を式(9)のように計算すると、+∞に発散する。

$$j_1(0)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}J(x)\,dx=+\infty \quad (9)$$

(2) 収束の予想

式(4)を見ると、近似関数G(t)が変数xを含む式(10)の関数G(t)の形であれば、式(4)が収束しそうだと予想される。

$$G(t)=(t-x)^k \quad (k=0、1、2、・・・) \quad (10)$$

式(4)を式(10)の関数G(t)を用いて式(11)のように変形してみると、確かに収束する。

$$\begin{aligned} j_n(x) &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}G(t)\cdot F(t)\,dt \\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}(t-x)^k\cdot F(t)\,dt \\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n+k-1}\cdot F(t)\,dt \\ &=f_{n+k}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

式(4)に含まれる変数tと変数xに注意が必要である。変数tは、初めは独立変数として機能し、積分計算の後に消滅する。変数xは初めは定数として機能し、積分計算の後に独立変数として機能する。式(10)の関数G(t)には、式(4)と同じ性質の変数tと変数xが含まれるが、式(6)の右辺の関数G(t)には、式(4)と同じ性質の変数tだけが含まれる。式(6)の右辺の関数G(t)を変形して、式(10)の関数G(t)を用いて表示することができれば、積が収束する。

(4) テイラー展開

微分可能関数$\phi(t)$を式(12)のように、点t＝xのまわりでテイラー展開すると、関数$\phi(t)$が式(10)の関数G(t)の線形結合の形で表示される。

$$\begin{aligned} \phi(t) &=\phi(x)+\frac{\phi'(x)}{1!}(t-x)+\frac{\phi''(x)}{2!}(t-x)^2+\cdots \\ &\qquad +\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k+\cdots \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k \end{aligned} \quad (12)$$

k＝0については、$\phi^{(0)}(x)=\phi(x)$、0!＝1としている。式(12)の収束半径が+∞であると仮定する。式(12)の記号Σで足し算が行われており、式(10)の関数G(t)の線形結合になっている。式(12)の関数$\phi(t)$を式(6)の近似関数G(t)に代入すれば式(13)を得る。

$$J(t)=\phi(t)\cdot F(t) \quad (13)$$

式(13)の関数J(t)を式(4)に代入すると式(14)が得られる。

$$j_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}f_{n+k}(x) \quad (14)$$

式(12)と式(14)を比べると、式(12)の$(t-x)^k$と式(14)の$f_{n+k}(x)$が対応している。(t-x)＞1であれば、k→+∞のとき$(t-x)^k\to+\infty$となるが、式(12)は収束する。だから、k→+∞のとき$f_{n+k}(x)\to+\infty$となっても式(14)は収束する。式(13)の関数J(x)を式(2)に代入すると式(15)が得られる。

$$j_h(x)=\phi(x)\cdot f_h(x) \quad (15)$$

式(13)の関数J(x)を式(3)に代入すると式(16)が得られる。

$$j_d(x)=\phi(x)\cdot f_d(x) \quad (16)$$

式(14)、式(15)、式(16)のうち、式(15)、式(16)だけが式(13)と同型である。式(15)の$j_h(x)$、式(16)の$j_d(x)$、式(14)の$j_n(x)$を式(5)に代入すれば、微分可能関数$\phi(x)$と超関数f(x)の積の超関数j(x)が得られる。

(5) 和と積の比較

積は各点における演算である。近似関数F(x)とG(x)の積J(x)を近似関数として成分$j_n(x)$を求めると、発散する場合がある。成分$j_n(x)$が発散すれば、超関数j(x)を定義できない。和も各点における演算である。近似関数F(x)とG(x)の和J(x)を近似関数として成分$j_n(x)$を求めると、必ず収束する。成分の収束について、和と積は異なる性質を示す。