超関数の積分

2014年5月11日
小林　保

(1) 区間における演算と点における演算

超関数の和、定数倍、横移動、鏡映、導関数、原始関数、関数と超関数の積は点における演算であるが、積分は下端から上端までの区間における演算である。点における演算を定義するとき、近似関数に対して演算を行った結果の関数J(x)を近似関数として、演算を行った結果の超関数j(x)を定義する。近似関数J(x)の点域$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$を超関数j(x)の点t＝xに対応させる。区間における演算を定義するときも、近似関数J(x)の点域と超関数j(x)の点を対応させるために、点における演算に変換して考察しなければならない。

(2) 不定積分

超関数f(x)の近似関数F(x)に対して、不定積分J(x)を式(1)で計算する。

$$J(x)=\int_{a-\rho}^{x} F(t)\,dt \qquad (1)$$

関数F(x)も関数J(x)も近似変数εを含む。変数tは右辺の計算の過程では独立変数として振る舞い、計算が完了すると消滅する。変数xは右辺の積分の上端であり、右辺の計算の過程では定数として振る舞い、計算が完了すると左辺の関数J(x)の独立変数として振る舞う。

式(1)の近似関数J(x)を近似関数とする超関数j(x)を超関数f(x)の不定積分と言い、式(2)で表す。

$$j(x)=\int_{a-0}^{x} f(t)\,dt \qquad (2)$$

超関数j(x)の成分は式(3)～式(5)で計算される。

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{x-\rho} F(x)\,dx \qquad (3)$$

$$j_d(x)=f_1(x) \qquad (4)$$

$$j_n(x)=-\frac{1}{n}f_{n+1}(x) \quad (n=1、2、3、\cdots) \qquad (5)$$

式(3)～式(5)を式(6)に代入すれば、不定積分j(x)が関数配列で表示される。

$$j(x)=\{j_h(x), j_d(x), j_1(x), j_2(x), \cdots\} \qquad (6)$$

式(2)と式(6)を組み合わせると式(7)が得られる。

$$\int_{a-0}^{x} f(t)dt=\{j_h(x), j_d(x), j_1(x), j_2(x), \cdots\} \qquad (7)$$

式(2)の超関数j(x)の点t＝xは式(1)の近似関数J(x)の点域$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$に、式(3)～式(5)を介して対応する。超関数f(x)の点t＝aが近似関数F(x)の点域$a-\rho \leqq t \leqq a+\rho$の全体に対応するので、近似関数F(x)の点域内の各点は超関数f(x)の点に対応しない。点域の端点$t=a-\rho$は例外で、極限t＝a-0に対応するので、式(1)の右辺の積分の下端$a-\rho$は式(2)の右辺の積分の下端a-0に、式(3)～式(5)を介さずに対応する。不定積分j(x)を定義するとき、上端xについての点における演算に変換して考察している。

不定積分j(x)の左連続成分$j_h(x)$は、超関数f(x)の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・で表わすことができない。左連続成分以外の成分$j_d(b)$、$j_1(b)$、$j_2(b)$、・・・は下端x＝a-0に関係なく数値が定まる。

(3) 非同格積分

式(2)、式(6)の超関数j(x)に定数x＝bを代入して得られた式(8)、式(9)のj(b)を非同格積分と言う。

$$j(b)=\int_{a-0}^{b} f(x)\,dx \qquad (8)$$

$$j(b)=\{j_h(b), j_d(b), j_1(b), j_2(b), \cdots\} \qquad (9)$$

式(8)の下端は極限a-0であり、上端は定数bであり、同格でない。

(4) 同格積分

式(2)にx＝b+0を代入するとj(b+0)が得られ、下端と上端の両方ともに極限で、同格になる。式(7)の上端に極限x＝b+0を代入すれば式(10)が求まる。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx=\{j_h(b)+j_d(b), 0, 0, 0, \cdots\} \qquad (10)$$

下端と上端が同格であれば、普通の関数についての積分と同じように、下端と上端を入れ替えることができ、式(11)が成り立つ。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx=-\int_{b+0}^{a-0} f(x)\,dx \qquad (11)$$

式(11)の右辺の同格積分は、式(12)の近似関数K(x)を用いて計算されるk(a-0)である。

$$K(x)=\int_{b+\rho}^{x} F(t)\,dt \qquad (12)$$

(5) 定積分

式(10)を関数擬値で表示すれば、左連続成分以外のすべての成分が0であるから、式(13)が求まり、単一の数値のように見える。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx=j_h(b)+j_d(b) \qquad (13)$$

式(13)の表現は、関数擬値で表示された同格積分であり、単一の数値のように見える。関数擬値で表示された同格積分を定積分と呼ぶ。式(3)、式(4)を用いて計算すれば、式(13)を式(14)のように書くことができる。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{b-\rho} F(x)\,dx+f_1(b)$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{b+\rho} F(x)\,dx \qquad (14)$$

(6) 積分の分割

同格な積分については、普通の関数についての積分と同じように、式(15)のように、積分区間を分割することができる。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx=\int_{a-0}^{c-0} f(x)\,dx+\int_{c-0}^{b+0} f(x)\,dx \qquad (15)$$

同格でない積分についても、式(16)のように、積分区間を分割することができる。

$$\int_{a-0}^{b} f(x)\,dx=\int_{a-0}^{c-0} f(x)\,dx+\int_{c-0}^{b} f(x)\,dx \qquad (16)$$

式(16)の右辺第1項は同格積分である。各辺に2個以上の非同格積分を含むことはできない。

(7) 原始関数と不定積分

式(1)について式(17)が成立つ。

$$J'(x)=F(x) \qquad (17)$$

式(17)の近似関数J'(x)から超関数j'(x)が定義されるから、超関数j'(x)と超関数f(x)の関係を式(18)で表すことにする。

$$j'(x)=f(x) \qquad (18)$$

式(18)は不定積分j(x)が超関数f(x)の原始関数であることを示しており、微分と積分を結びつける。