超関数の和、定数倍、横移動、反転、微分

2014年5月5日
小林　保

(1) 各点における演算

　和、定数倍、横移動、反転、微分は、各点における演算である。近似関数に対して演算を行って得た関数J(x)を近似関数として、式(1)～式(4)で成分$j_h(x)$、$j_d(x)$、$j_1(x)$、$j_2(x)$、・・・を求める。

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho) \quad (1)$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{J(x+\rho)-J(x-\rho)\} \quad (2)$$

$$j_1(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} J(t)\,dt \quad (3)$$

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1}J(t)\,dt \quad (4)$$

成分を点 ，で区切って並べ、括弧（ ）で包んで式(5)で表されたj(x)を演算の結果と定義する。

$$j(x)=\{j_h(x), j_d(x), j_1(x), j_2(x), \cdots\} \quad (5)$$

定数倍、横移動、反転、微分は、1つの超関数f(x)に対する演算である。和は2つの超関数f(x)とg(x)に対する演算である。和、定数倍、横移動、反転、微分については、全ての成分が収束するので、演算を定義できる。

(2) 和、定数倍、横移動

　式(6)で計算される関数J(x)が超関数f(x)と超関数g(x)の和を定義する。

$$J(x)=F(x)+G(x) \quad (6)$$

成分について、式(7)～式(10)が成り立つ。

$$j_h(x)=f_h(x)+g_h(x) \quad (7)$$

$$j_d(x)=f_d(x)+g_d(x) \quad (8)$$

$$j_1(x)=f_1(x)+g_1(x) \quad (9)$$

$$j_n(x)=f_n(x)+g_n(x) \quad (10)$$

　定数cを用いて式(11)で計算される関数J(x)が超関数f(x)の定数倍を定義する。

$$J(x)=c\cdot F(x) \quad (11)$$

成分について、式(12)～式(15)が成り立つ。

$$j_h(x)=c\cdot f_h(x) \quad (12)$$

$$j_d(x)=c\cdot f_d(x) \quad (13)$$

$$j_1(x)=c\cdot f_1(x) \quad (14)$$

$$j_n(x)=c\cdot f_n(x) \quad (15)$$

　定数aを用いて式(16)で計算される関数J(x)がを超関数f(x)の横移動を定義する。

$$J(x)=F(x-a) \quad (16)$$

成分について、式(17)～式(20)が成り立つ。

$$j_h(x)=f_h(x-a) \quad (17)$$

$$j_d(x)=f_d(x-a) \quad (18)$$

$$j_1(x)=f_1(x-a) \quad (19)$$

$$j_n(x)=f_n(x-a) \quad (20)$$

　和と定数倍と横移動については、全ての成分の計算式が近似関数の計算式と同型である。

　式(21)で計算される関数J(x)が超関数f(x)と超関数g(x)の差を定義する。

$$J(x)=F(x)-G(x)=F(x)+(-1)\cdot G(x) \quad (21)$$

式(21)は、-1の定数倍と和の組み合わせで説明される。

(3) 反転

　式(22)で計算される関数J(x)が超関数f(x)の反転を定義する。

$$J(x)=F(-x) \quad (22)$$

成分について式(23)～式(26)が成り立つ。

$$j_h(x)=f_d(-x)+f_h(-x) \quad (23)$$

$$j_d(x)=-f_d(-x) \quad (24)$$

$$j_n(x)=f_n(-x) \quad (n=1, 3, 5, \cdots) \quad (25)$$

$$j_n(x)=-f_n(-x) \quad (n=2, 4, 6, \cdots) \quad (26)$$

成分の計算式の式(23)～式(26)のうちで、式(25)だけが近似関数の計算式の式(22)と同型である。

(4) 微分

　式(27)で計算される関数J(x)が超関数f(x)の微分を定義する。

$$J(x)=F'(x) \quad (27)$$

成分について、式(28)～式(32)が成り立つ。

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}(f_h)'(x-\rho) \quad (28)$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\{(f_h)'(x+\rho)-(f_h)'(x-\rho)\} \quad (29)$$

$$j_1(x)=f_d(x) \quad (30)$$

$$j_2(x)=-f_1(x) \quad (31)$$

$$j_n(x)=-(n-1)f_{n-1}(x) \quad (32)$$

　微分については、成分の計算式の式(28)～式(32)のうちで、近似関数の計算式の式(27)と同型な式は無い。左連続成分$f_h(x)$の導関数$(f_h)'(x)$を用いて、左連続成分$j_h(x)$、段差成分$j_d(x)$が表示されている。1次の成分$j_1(x)$は段差成分$f_d(x)$に一致する。2次以上の成分については、n次の成分$j_n(x)$が(n-1)の次成分$f_{n-1}(x)$の-(n-1)倍に一致する。

(5) 計算例

　式(6)の関数J(x)から計算される成分$j_1(x)$について、式(3)に代入して式(33)のように計算され、成分$j_1(x)$が収束する。

$$\begin{aligned}
j_1(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} J(t)\,dt \\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} \{F(t)+G(t)\}\,dt \\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t)\,dt+\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} G(t)\,dt \\
&=f_1(x)+g_1(x) \qquad (33)
\end{aligned}$$

式(9)が成り立つことを式(33)が説明する。

　式(22)の関数J(x)から計算される成分$j_h(x)$について、式(1)に代入して式(34)のように計算され、成分$j_h(x)$が収束する。

$$\begin{aligned}
j_h(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(-x-\rho) \\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F\{-(x+\rho)\} \\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[F\{-(x+\rho)\}-F\{-(x-\rho)\}+F\{-(x-\rho)\}] \\
&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[F\{-(x+\rho)\}-F\{-(x-\rho)\}] \\
&\qquad +\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F\{-(x-\rho)\} \\
&=f_d(-x)+f_h(-x) \qquad (34)
\end{aligned}$$

式(23)が成り立つことを式(34)が説明する。

　和、定数倍、横移動、反転、微分については、式(33)、式(34)と同様に成分を計算することができる。