微分学の基本の着想と超関数

2014年4月7日
小林　保

(1) 微分係数の定義

関数f(x)の点x＝aにおける微分係数f'(a)は、式(1)で与えられる。

$$f'(a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\qquad(1)$$

補助変数εは正負の値をとり、0に近づく。式(1)の右辺の極限が収束するとき微分可能である。正の補助変数ρを用いると、式(1)は式(2)、式(3)のように書き換えられる。

$$f'(a)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho)-f(a)}{\rho}\qquad(2)$$

$$f'(a)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(a-\rho)-f(a)}{-\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(a)-f(a-\rho)}{\rho}\qquad(3)$$

微分係数の意味は、図-1の曲線上でx＝aの点Aに

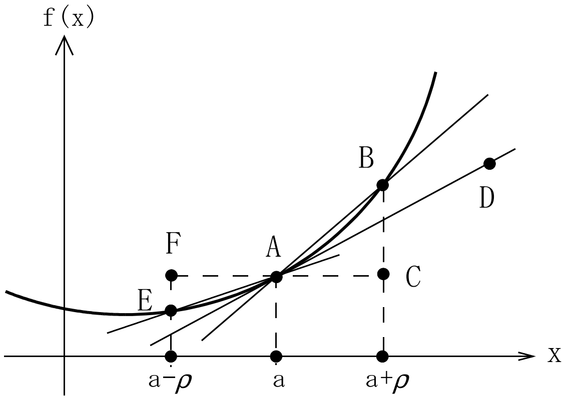

図-1　微分係数の定義

おける接線ADの傾きである。接線ADを求めるために、x＝a+ρの点Bとし、割線ABを引く。点Aからx軸に平行に直線ACを引く。割線ABの傾きは $\frac{CB}{AC}$ である。$\rho\to 0$とすると、点Bは点Aに近づき、割線ABは接線ADに近づく。傾き $\frac{CB}{AC}$ は式(2)の微分係数f'(a)に近づく。x＝a-ρの点Eをとって、点Bのときと同じように考えると、割線EAの傾き $\frac{EF}{FA}$ が式(3)の微分係数f'(a)に近づく。式(2)、式(3)、図-1は、長さ微小の区間a-ρ≦x≦a+ρにおける関数f(x)の変動の状況から、関数f(x)の点x＝aにおける微分係数f'(a)を定義する。微小区間と点を同一視している。

(2) 関数の連続性

関数f(x)について、３つの数値 $\lim_{\rho\to 0}f(a-\rho)$、f(a)、$\lim_{\rho\to 0}f(a+\rho)$が存在して、式(4)が成り立つとき、点x＝aにおいて関数f(x)は連続である。

$$\lim_{\rho\to 0}f(a-\rho)=f(a)=\lim_{\rho\to 0}f(a+\rho)\qquad(4)$$

式(4)は図-2の３点x＝a-ρ、x＝a、x＝a+ρにおける関数値f(a-ρ)、f(a)、f(a+ρ)がほぼ等しいことを意味している。図-2の３点B、A、Cがほぼ

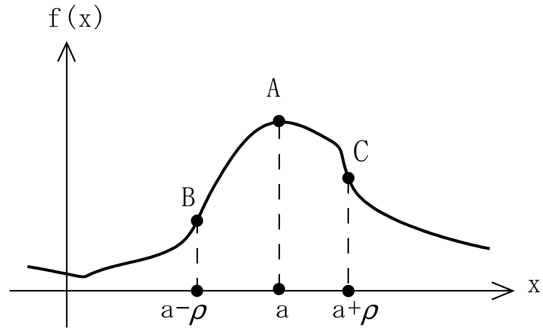

図-2　連続性の定義

一致することを意味している。式(4)、図-2は、長さ微小の区間a-ρ≦x≦a+ρにおける関数f(x)の変動の状況から、関数f(x)の点x＝aにおける連続性を定義する。微小区間と点を同一視している。

(3) 超関数の成分表示

近似変数εを含む近似関数F(x)と点径変数ρを用いて、超関数f(x)の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・を式(5)～式(7)で計算する。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}F(x-\rho)\qquad(5)$$

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}\qquad(6)$$

$$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt$$

$$(n=1、2、3、・・・)\qquad(7)$$

式(7)の左辺の添え字のnと右辺の冪指数n-1がずれていることに注意する。近似関数F(x)についての区間x-ρ≦t≦x+ρを超関数f(x)の点t＝xについての点域と呼ぶ。式(5)～式(7)の計算において、近似変数εは点径変数ρより速く0に近づく。$f_h(x)$を左連続成分、$f_d(x)$を段差成分、$f_1(x)$を第1次成分、$f_2(x)$を第2次成分、・・・と呼ぶ。

成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・を点 , で区切って並べ、括弧 { } で包んで、ベクトルと同じ表現で、超関数f(x)を式(8)で表す。

$$f(x)=\{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x),・・・\}\qquad(8)$$

式(8)の表現を関数配列と呼ぶ。

式(5)～式(7)は、点域x-ρ≦t≦x+ρにおける近似関数F(x)の変動の状況から点t＝xにおける成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・を計算している。近似関数F(x)の点域と超関数f(x)の点を同一視している。

(4) 基本の着想の類似

微分係数を定義し、連続性を定義することは微分学の基本である。微分学の基本の着想は、微小区間と点を同一視することである。近似関数から成分を定義することは、成分表示型の理論の基本である。成分表示型の理論の基本の着想は、点域と点を同一視することである。成分表示型の理論の基本の着想は、微分学の基本の着想と類似している。微分学の基本の着想においては、関数f(x)の微小区間と関数f(x)の点を同一視するが、成分表示型の理論の着想においては、近似関数F(x)の微小区間と超関数f(x)の点を同一視する。