

(1) 関数の一義性

独立変数 x の値が決まると、それに応じて従属変数 $f(x)$ の値が決まる規則があるとき、その規則を関数と言う。従属変数の値が1つに決まるので、関数の一義性と呼ぶ。

式(1)、式(2)の関数 $\zeta(x)$ は点 $x=0$ において大きき1の不連続がある。

$$\zeta(x)=0 \quad (-\infty < x < 0) \quad (1)$$

$$\zeta(x)=1 \quad (0 < x < +\infty) \quad (2)$$

関数 $\zeta(x)$ はへビサイド関数である。区間 $x \neq 0$ において関数 $\zeta(x)$ は関数の一義性を保持している。

点 $x=0$ においては関数 $\zeta(x)$ の関数値を0、1、 $\frac{1}{2}$ 、 \dots の何れとも決め難く、一義性を保持しないので、式(3)のように定義域外とすることが自然である。

$$\zeta(0) = (\text{不定義}) \quad (3)$$

しかし、式(4)のように関数値を決めれば、関数の一義性を保持する。

$$\zeta(0) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

式(4)の関数値は $\frac{1}{2}$ に限らず、0、1、 \dots の何れと決めても、関数の一義性を保持する。

(2) 関数の接続

区間 $a < x < c$ で連続な関数 $f(x)$ 、区間 $c < x < b$ で連続な関数 $g(x)$ があるとき、式(5)、式(6)の関数 $j(x)$ を作ることができる。

$$j(x) = f(x) \quad (a < x < c) \quad (5)$$

$$j(x) = g(x) \quad (c < x < b) \quad (6)$$

式(7)が成り立つとき、関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ は点 $x=c$ において接続可能であると言う。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(c+\varepsilon) \quad (7)$$

関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ が接続可能であるとき、式(5)、式(6)、式(8)の関数 $j(x)$ を作ることができる。関数の接続と言う。

$$j(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(c-\varepsilon) \quad (8)$$

(3) 積分の可逆性

式(9)が成り立つとき、関数 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を求める演算を微分と言い、関数 $g(x)$ から関数 $f(x)$ を求める演算を積分と言う。

$$f'(x) = g(x) \quad (9)$$

微分と積分は逆演算であるから、関数 $f(x)$ に微分と積分を繰り返したとき元に戻ることが望ましい。しかし、微分と積分をこの順序で行うと積分定数だけの任意性が生じ、元には戻らない。積分と微分をこの順序で行うと関数 $f(x)$ が連続関数であれば元に戻る。積分と微分をこの順序で行って元に戻るとき、積分の可逆性があるという。

式(1)、式(2)、式(4)の関数 $\zeta(x)$ は、実数全域 $-\infty < x < +\infty$ で関数の一義性を保持する。関数 $\zeta(x)$ を積分すると、積分定数 C として、式(10)、式(11)の関数 $f(x)$ が得られる。

$$f(x) = C \quad (x < 0) \quad (10)$$

$$f(x) = x+C \quad (0 < x) \quad (11)$$

式(1)、式(2)、式(4)の関数 $\zeta(x)$ は、点 $x=0$ において積分不能であるから、関数値 $f(0)$ は定義されないが、接続により式(12)が得られる。

$$f(0) = C \quad (12)$$

式(10)、式(11)、式(12)の関数 $f(x)$ は実数全域で定義される。

式(10)、式(11)、式(12)の関数 $f(x)$ は点 $x=0$ において微分不能であるから、導関数 $f'(x)$ は式(13)、式(14)で表される。

$$f'(x) = 0 \quad (x < 0) \quad (13)$$

$$f'(x) = 1 \quad (0 < x) \quad (14)$$

点 $x=0$ は定義域外である。関数 $f'(x)$ は式(1)、式(2)、式(4)の関数 $\zeta(x)$ に戻らないから、関数 $\zeta(x)$ は積分の可逆性がない。

(4) 関数の一義性の放棄

関数の一義性と積分の可逆性を両立することができないので、積分の可逆性を優先し、関数の一義性を諦める方針が考えられる。式(1)、式(2)の関数 $\zeta(x)$ は点 $x=0$ について、式(4)のように関数値を決めず、常に式(3)とする。既存の関数解析の理論は、この方針を採用している。しかし、既存の関数解析の理論の教科書は、式(3)を明示しない場合が多く、不連続点 $x=0$ が定義域内であるかのような議論をする場合がある。そして、式(15)の関数方程式の解関数 $f(x)$ の点 $x=0$ のように明らかな不定義点までも、定義域内であるかのような議論をする場合がある。

$$x \cdot f(x) = 1 \quad (15)$$

この方針は不連続関数について、式(3)、式(15)の点 $x=0$ の事例のように、定義域が曖昧になることが欠点である。

(5) 成分表示の提案

関数の一義性と積分の可逆性を両立するために、成分を導入する方針を提案する。関数 $\zeta(x)$ を成分表示した関数を $\eta(x)$ とし、左連続成分 $\eta_h(x)$ を式(16)、段差成分 $\eta_a(x)$ を式(17)で定義する。

$$\eta_h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta(x-\varepsilon) \quad (16)$$

$$\eta_a(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\zeta(x+\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon)\} \quad (17)$$

成分 $\eta_h(x)$ 、成分 $\eta_a(x)$ は点 $x=0$ における関数値 $\zeta(0)$ に関わらず、同じである。成分表示の関数 $\eta(x)$ を式(18)で表す。

$$\eta(x) = \{\eta_h(x), \eta_a(x)\} \quad (18)$$

関数 $\eta(x)$ は成分2個型である。点 $x=0$ において、大きき1の不連続のある成分表示の関数 $\eta(x)$ は、式(19)、式(20)、式(21)のように、表される。

$$\eta(x) = (0, 0) \quad (-\infty < x < 0) \quad (19)$$

$$\eta(x) = (0, 1) \quad (x = 0) \quad (20)$$

$$\eta(x) = (1, 0) \quad (0 < x < +\infty) \quad (21)$$

式(19)、式(20)、式(21)の関数 $\eta(x)$ の積分を関数 $f(x)$ で表し、成分表示を適用すれば、式(22)、式(23)のように表される。

$$f(x) = (C, 0) \quad (-\infty < x \leq 0) \quad (22)$$

$$f(x) = (x+C, 0) \quad (0 \leq x < +\infty) \quad (23)$$

式(22)、式(23)を微分すれば、式(24)、式(25)のように計算され、式(19)、式(20)、式(21)が得られ、関数の一義性と積分の可逆性が両立する。

$$(f')_h(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_h)'(-\varepsilon) \quad (24)$$

$$(f')_a(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{(f_h)'(+\varepsilon) - (f_h)'(-\varepsilon)\} \quad (25)$$

任意の位置に任意の有限な大ききの不連続を持つ関数を、成分2個の成分表示すれば、関数の一義性と積分の可逆性が両立する。