x倍に関する基本関数の系列

小林　保

(1) 基本段差関数

式(1)、式(2)、式(3)の超関数 $\alpha_0(x)$ を基本段差関数と言う。

$$\alpha_0(x)=(0,0,0,0,\cdots)\quad(-\infty<x<0)\quad(1)$$
$$\alpha_0(x)=(0,1,0,0,\cdots)\quad(x=0)\quad(2)$$
$$\alpha_0(x)=(1,0,0,0,\cdots)\quad(0<x<+\infty)\quad(3)$$

式(1)、式(2)、式(3)は関数配列で表示されているが、関数擬値で表示すれば式(4)、式(5)、式(6)で表される。

$$\alpha_0(x)=0\quad(-\infty<x<0)\quad(4)$$
$\alpha_0(x)=$ 　$(x=0)$　(5)
$$\alpha_0(x)=1\quad(0<x<+\infty)\quad(6)$$

成分を計算すると、式(7)の関数 $A_0(x)$ が基本段差関数 $\alpha_0(x)$ の近似関数の1つであることがわかる。

$$A_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)dx\quad(7)$$

(2) 右半分冪関数

$n=1,2,3,\cdots$ に対して、式(8)、式(9)の超関数 $\alpha_n(x)$ を右半分n次冪関数と言う。

$$\alpha_n(x)=0\quad(-\infty<x\leqq 0)\quad(8)$$
$$\alpha_n(x)=x^n\quad(0\leqq x<+\infty)\quad(9)$$

点 $x=0$ について、式(8)、式(9)は同じになる。式(8)、式(9)は関数擬値で表示されているが、関数配列で表示すれば、超関数 $\alpha_n(x)$ は式(10)、式(11)で表される。

$$\alpha_n(x)=(0,0,0,\cdots)\quad(-\infty<x\leqq 0)\quad(10)$$
$$\alpha_n(x)=(x^n,0,0,\cdots)\quad(0\leqq x<+\infty)\quad(11)$$

右半分冪関数のx倍に関して式(12)が成り立つ。

$$x\cdot\alpha_n(x)=\alpha_{n+1}(x)\quad(n=1,2,4,\cdots)\quad(12)$$

式(7)の近似関数 $A_0(x)$ のx倍の $x\cdot A_0(x)$ を近似関数として成分を計算し、関数擬値で表示すると、式(13)、式(14)、式(15)が得られる。

$$x\cdot\alpha_0(x)=0\quad(-\infty<x<0)\quad(13)$$
$$x\cdot\alpha_0(x)=0\quad(x=0)\quad(14)$$
$$x\cdot\alpha_0(x)=x\quad(0<x<+\infty)\quad(15)$$

式(13)、式(14)、式(15)の右辺は超関数 $\alpha_1(x)$ であるから、式(16)が成り立つ。

$$x\cdot\alpha_0(x)=\alpha_1(x)\quad(16)$$

式(12)と式(16)を併せると式(17)が成り立つ。

$$x\cdot\alpha_n(x)=\alpha_{n+1}(x)\quad(n=0,1,2,\cdots)\quad(17)$$

式(12)と式(17)はn=0が異なっている。式(10)、式(11)でn=0とし、点x=0を除外すれば、式(18)、式(19)が得られる。

$$\alpha_0(x)=(0,0,0,0,\cdots)\quad(-\infty<x<0)\quad(18)$$
$$\alpha_0(x)=(1,0,0,0,\cdots)\quad(0<x<+\infty)\quad(19)$$

式(18)、式(19)は式(1)、式(3)と同じであるから、点x=0を例外として、超関数 $\alpha_0(x)$ は右半分0次冪関数である。

(3) 基本集中関数

自然数nに対して、式(20)、式(21)の超関数 $\beta_n(x)$ を基本n次集中関数と言う。

$$\beta_n(x)=0\quad(x\neq 0)\quad(20)$$
$\beta_n(x)=$  ^{n}　$(x=0)$　(21)

式(20)、式(21)は関数擬値で表示されている。式(22)の関数 $B_1(x)$ は基本1次集中関数 $\beta_1(x)$ の近似関数の1つである。

$$B_1(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)dx\quad(22)$$

近似関数 $B_1(x)$ を基にして、式(23)を用いて、順次、近似関数 $B_2(x)$、$B_3(x)$、$B_4(x)$、・・・を求める。

$$B_{n+1}(x)=\frac{1}{n}B_n'(x)\quad(23)$$

近似関数 $B_n(x)$ の成分を計算し、関数擬値で表示すると、式(20)、式(21)が得られる。式(23)で順次求められる関数 $B_n(x)$ が式(20)、式(21)の超関数 $\beta_n(x)$ の近似関数である。

式(23)で順次求められる近似関数 $B_n(x)$ のx倍の $x\cdot B_n(x)$ を近似関数として成分を計算し、関数擬値で表示すると、式(24)、式(25)が得られる。

$$x\cdot\beta_n(x)=0\quad(x\neq 0)\quad(24)$$
$x\cdot\beta_n(x)=$  $^{n-1}$　$(x=0)$　(25)

式(20)、式(21)と式(24)、式(25)を比べると、式(26)が得られる。

$$x\cdot\beta_n(x)=\beta_{n-1}(x)\quad(n=2,3,4,\cdots)\quad(26)$$

近似関数 $B_1(x)$ のx倍の $x\cdot B_1(x)$ を近似関数として成分を計算し、関数擬値で表示すると、式(27)が得られる。

$$x\cdot\beta_1(x)=0\quad(-\infty<x<+\infty)\quad(27)$$

(4) 右半分冪関数と基本集中関数の関係

超関数 $\alpha_0(x)$、$\alpha_1(x)$、$\alpha_2(x)$、・・・、$\alpha_n(x)$、・・・の系列を考えると、式(17)により、結びつけられる。超関数 $\beta_1(x)$、$\beta_2(x)$、$\beta_3(x)$、・・・、$\beta_n(x)$、・・・の系列を考えると、式(26)により、結びつけられる。式(17)と式(26)の類似が注目される。式(27)が成り立ち、超関数 $\alpha_n(x)$ の系列と超関数 $\beta_n(x)$ の系列は、結びつけられない。