微分に関する基本関数の系列

小林　保

(1) 基本段差関数

　式(1)、式(2)、式(3)の超関数$\alpha_0(x)$を基本段差関数と言う。

$$\alpha_0(x)=(0,0,0,0,\cdots) \quad (-\infty<x<0) \quad (1)$$

$$\alpha_0(x)=(0,1,0,0,\cdots) \quad (x=0) \quad (2)$$

$$\alpha_0(x)=(1,0,0,0,\cdots) \quad (0<x<+\infty) \quad (3)$$

式(1)、式(2)、式(3)は関数配列で表示されているが、関数擬値で表示すれば式(4)、式(5)、式(6)で表される。

$$\alpha_0(x)=0 \quad (-\infty<x<0) \quad (4)$$

$\alpha_0(x)=$  $\quad (x=0) \quad (5)$

$$\alpha_0(x)=1 \quad (0<x<+\infty) \quad (6)$$

成分を計算すると、式(7)の関数$A_0(x)$が基本段差関数$\alpha_0(x)$の近似関数の1つであることがわかる。

$$A_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)dx \quad (7)$$

式(9)が成り立つけれども、式(8)、式(10)が成り立ち、$\lim_{\varepsilon\to 0}A_0(x)$は点x＝0において不連続であり、式(2)、式(5)と考える。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A_0(x)=0 \quad (-\infty<x<0) \quad (8)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A_0(0)=A_0(0)=\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A_0(x)=1 \quad (0<x<+\infty) \quad (10)$$

(2) 右半分冪関数

　n＝1、2、3、・・・に対して、式(11)、式(12)の超関数$\alpha_n(x)$を右半分n次冪関数と言う。

$$\alpha_n(x)=(0,0,0,0,\cdots) \quad (-\infty<x\leqq 0) \quad (11)$$

$$\alpha_n(x)=(x^n,0,0,0,\cdots) \quad (0\leqq x<+\infty) \quad (12)$$

点x＝0について、式(11)、式(12)は同じになる。式(7)の関数$A_0(x)$を基にして、式(13)の漸化式で、n＝1、2、3、・・・とすると、関数$A_1(x)$、$A_2(x)$、$A_3(x)$、・・・が作られる。

$$A_n(x)=n\cdot\int_{-\infty}^{x}A_{n-1}(x)\,dx \quad (13)$$

成分を計算すると、式(13)の関数$A_n(x)$が右半分n次冪関数$\alpha_n(x)$の近似関数の1つであることがわかる。

　右半分n次冪関数$\alpha_n(x)$の左連続成分$\alpha_{n\,h}(x)$は式(14)、式(15)で表される。

$$\alpha_{n\,h}(x)=0 \quad (-\infty<x\leqq 0) \quad (14)$$

$$\alpha_{n\,h}(x)=x^n \quad (0\leqq x<+\infty) \quad (15)$$

式(11)、式(12)は関数配列で表示されているが、関数擬値で表示すれば式(16)、式(17)で表される。

$$\alpha_n(x)=0 \quad (-\infty<x\leqq 0) \quad (16)$$

$$\alpha_n(x)=x^n \quad (0\leqq x<+\infty) \quad (17)$$

式(14)、式(15)の関数$\alpha_{n\,h}(x)$と式(16)、式(17)の超関数$\alpha_n(x)$は見かけは同じであるが、微分可能回数が異なっている。関数$\alpha_{n\,h}(x)$はn−1回微分可能である。関数$\alpha_{1\,h}(x)$は連続ではあるが、微分不能である。式(14)、式(15)を微分すると、式(18)が成り立つ。

$$(\alpha_{n\,h})'(x)=n\cdot\alpha_{n-1\,h}(x) \quad (n=2,3,4,\cdots) \quad (18)$$

式(13)の近似関数$A_n(x)$が無限回微分可能であるから、超関数$\alpha_n(x)$は無限回微分可能である。式(13)を微分すると式(19)が得られ、式(20)が成り立つ。

$$A_n'(x)=n\cdot A_{n-1}(x) \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (19)$$

$$\alpha_n'(x)=n\cdot\alpha_{n-1}(x) \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (20)$$

式(18)は式(20)とn＝1が異なっている。

(3) 基本集中関数

　自然数nに対して式(21)、式(22)の超関数$\beta_n(x)$を基本n次集中関数と言う。

$$\beta_n(x)=0 \quad (x\neq 0) \quad (21)$$

$\beta_n(x)=$  $^n \quad (x=0) \quad (22)$

式(21)、式(22)は関数擬値で表示されている。成分を計算することにより、式(23)の関数$B_1(x)$が基本1次集中関数$\beta_1(x)$の近似関数の1つであることがわかる。

$$B_1(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)dx \quad (23)$$

式(23)の近似関数$B_1(x)$は無限回微分可能であるから、基本1次集中関数$\beta_1(x)$は無限回微分可能である。式(23)の関数$B_1(x)$を基にして、式(24)の漸化式で、n＝1、2、3、・・・とすると、関数$B_2(x)$、$B_3(x)$、$B_4(x)$、・・・が作られる。

$$B_n'(x)=n\cdot B_{n+1}(x) \quad (24)$$

成分を計算することにより、関数$B_n(x)$が基本集中関数$\beta_n(x)$の近似関数の1つであることがわかる。式(24)は式(25)を意味する。

$$\beta_n'(x)=n\cdot\beta_{n+1}(x) \quad (25)$$

式(7)と式(23)の関係から式(26)が成り立つ。

$$\alpha_0'(x)=\beta_1(x) \quad (26)$$

(4) 右半分冪関数と基本集中関数の関係

　超関数$\alpha_0(x)$、$\alpha_1(x)$、$\alpha_2(x)$、・・・、$\alpha_n(x)$、・・・の系列を考えると、式(20)により、結びつけられる。超関数$\beta_1(x)$、$\beta_2(x)$、$\beta_3(x)$、・・・、$\beta_n(x)$、・・・の系列を考えると、式(25)により、結びつけられる。式(20)と式(25)の類似が注目される。式(26)が成り立ち、超関数$\alpha_n(x)$の系列と超関数$\beta_n(x)$の系列は、結びつけられる。