理論の成果の借用

小林　保

(1) はじめに

汎関数型の理論は、1945年頃にフランスのシュバルツが書いた教科書に集大成されており、研究の歴史が古い。成分表示型の理論は、2011年頃に筆者が提案しており、研究の歴史は古くない。２つの理論について類似している部分があれば、類似に注目し、汎関数型の理論の成果を成分表示型の理論へ借用することができ、研究の能率を高めることができる。理論の類似と差違を整理し、成果の借用の可能性について検討する。

(2) 近似関数の収束条件

汎関数型の理論においては、式(1)が成り立つとき、特異化変数εを含む近似関数F(x)が超関数f(x)を定義すると言う。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\phi(x)\,dx=\tau(\phi) \qquad (1)$$

式(1)は関数$\phi(x)$を入力要素とし、数値$\tau(\phi)$を出力要素とする汎関数である。式(1)の積分区間が実数全域$-\infty<x<+\infty$であり、積分が収束するために、被積分関数$F(x)\phi(x)$が急減少関数に限定される。特異点においては、超関数f(x)は関数値を持たない。

成分表示型の理論においては、近似関数F(x)と点半径変数ρを用いて、超関数f(x)の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・を式(2)～式(4)で計算する。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho) \qquad (2)$$

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{F(x+\rho)-F(x-\rho)\} \qquad (3)$$

$$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt \qquad (n=1、2、3、・・・) \qquad (4)$$

成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・を点 , で区切って並べ、括弧 { } で包んで、ベクトルと同じ表現で、超関数f(x)を式(5)で表す。

$$f(x)=\{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x), \cdots\} \qquad (5)$$

成分は各点収束するから、特異点においても、超関数f(x)は関数値を持つ。

汎関数型の理論も成分表示型の理論も、特異化変数εを含む近似関数F(x)を用いる。式(1)が汎関数型の理論の収束条件であり、式(2)～式(4)が成分表示型の理論の収束条件である。

(3) 近似関数の収束条件の類似

ディラック関数$\delta(x)$の事例について、式(1)の収束条件と式(2)～式(4)の収束条件の類似について検討する。

ディラック関数$\delta(x)$について、式(1)の収束条件は、式(6)のように書き換えることができる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \varDelta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad (6)$$

ディラック関数$\delta(x)$の点x＝0について、式(2)～式(4)の収束条件は、式(7)、式(8)、式(9)、式(10)のように書き換えることができる。

$$\delta_h(0)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\varDelta(-\rho)=0 \qquad (7)$$

$$\delta_d(0)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\varDelta(+\rho)-\varDelta(-\rho)\}=0 \qquad (8)$$

$$\delta_1(0)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\varDelta(t)\,dt=1 \qquad (9)$$

$$\delta_n(0)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}t^{n-1}\varDelta(t)\,dt=0 \qquad (n=2、3、4、・・・) \qquad (10)$$

式(6)の汎関数の入力要素$\phi(x)$として式(11)を満足する関数$\phi(x)$を用いると、$\phi(0)=0$であるから、式(6)から式(12)が成り立つ。

$$\phi(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq+\rho) \qquad (11)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varDelta(x)=0 \qquad (+\rho\leqq x<+\infty) \qquad (12)$$

式(12)と同様にして式(13)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varDelta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\rho) \qquad (13)$$

式(12)、式(13)、式(6)から式(14)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\varDelta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad (14)$$

関数$\phi(x)$を式(15)のように点x＝0のまわりでテイラー展開する。

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \qquad (15)$$

式(15)を式(14)の左辺に代入して整理し、$\rho\to 0$とすれば式(16)が得られる。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\int_{-\rho}^{+\rho}x^{n-1}\varDelta(x)\,dx=\phi^{(0)}(0) \qquad (16)$$

0!＝1である。式(16)の記号Σのn＝1の項について両辺を比べると式(9)が得られ、式(16)の記号Σのn＝2、3、4、・・・の項について両辺を比べると式(10)が得られる。式(6)から式(9)、式(10)が得られたことになる。別途の考察で式(12)、式(13)から式(7)、式(8)が得られる。だから、式(6)の収束条件と式(7)、式(8)、式(9)、式(10)の収束条件は、見かけは異なっているが実質的に同じである。

(4) 理論の成果の借用の可能性

式(1)の収束条件と式(2)～式(4)の収束条件は、見かけが異なっている。特異点においては、汎関数型の超関数f(x)は関数値を持たない。特異点においても、成分表示型の超関数f(x)は関数値を持つ。見かけが異なっているにも拘わらず、式(6)と式(7)～式(10)から示唆されるように、式(1)の収束条件と式(2)～式(4)の収束条件は、近似関数F(x)の定義域が実数全域$-\infty<x<+\infty$であるとき、実質的に同じである。収束条件が類似していれば、汎関数型の超関数f(x)の性質と成分表示型の超関数f(x)の性質が類似する。超関数f(x)の性質が類似していれば、汎関数型の理論の成果を成分表示型の理論へ借用することができる。

(5) 定義域についての注意

近似関数の定義域が実数全域でない場合には、収束条件の類似性について、注意が必要であり、例外的な取り扱いになる。例えば、式(17)の近似関数F(x)は点x＝0が定義域外である。

$$F(x)=\frac{1}{x} \qquad (17)$$

式(1)の収束条件においては、主値を計算し、超関数f(x)の定義に点x＝0を含めている。式(2)～式(4)の収束条件においては、超関数f(x)の定義域に点x＝0を含めない。

(4) おわりに

近似関数の定義域が実数全域の場合、汎関数型の超関数の性質と成分表示型の超関数の性質が類似する。超関数の性質が類似していれば、汎関数型の理論の成果を成分表示型の理論へ借用することができる。