質量分布の観察から着想した成分表示

2013年12月24日
小林　保

(1) 質量分布の記述

鉛筆と小石を観察し、質量について考える。鉛筆の芯の位置に細い穴を開けて糸を通し、小石に細い穴を開けて糸を通し、糸を張って直線にすると、図のようになる。糸に沿って座標xを設定し、

鉛筆 $f_r(x)$　　小石 $f_1(x)$
(単位kg/m)　　(単位kg)
鉛筆の質量 Wkg　　小石の質量 Pkg

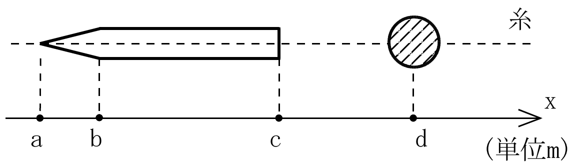

図 質量の2種類の分布状態

座標xは長さであるから、単位mとする。

鉛筆の質量を考察するときは、太さを捨象して考えるが、長さを捨象することができない。点x＝aから点x＝cまでの長さを持った直線に大きさ$f_r(x)$の質量密度が分布していると認識する。質量密度$f_r(x)$の単位はkg/mである。鉛筆の点x＝aから点x＝bまでの部分は削ってある。

小石の質量を考察するときは、小石の大きさを捨象して点と考える。小石の位置x＝cに大きさ$f_1(x)$の質量が分布していると認識する。質量$f_1(x)$の単位はkgである。

(2) 連続関数を用いた分布の表現

鉛筆の質量密度を関数$f_r(x)$で表すと、点x＝aで$f_r(a)=0$であり、区間a≦x≦bで徐々に増加し、点x＝bで$f_r(b)$になり、区間b≦x＜cで式(1)のように一定である。

$$f_r(x)=f_r(b) \qquad (b\leqq x<c) \tag{1}$$

点x＝cを除くと、鉛筆の質量分布$f_r(x)$は連続関数で表すことができる。式(2)の積分Wが鉛筆の全質量である。

$$W=\int_a^c f_r(x)\,dx \tag{2}$$

区間x≦a、c＜xにおいては、鉛筆がないので、質量の密度分布は式(3)で表される。

$$f_r(x)=0 \qquad (x\leqq a,\ c<x) \tag{3}$$

(3) 段差の表現における一義性の保持

点x＝cにおいては、鉛筆の端面が糸と垂直になっている。点x＝cにおいては､式(1)の数値$f_r(b)$から式(3)の数値0に急減しており、数値$f_r(c)$を$f_r(b)$、0、$\frac{1}{2}f_r(b)$、$\frac{1}{3}f_r(b)$、・・・ の何れとも、決め難い。 独立変数xの値を1つ決めると、それに応じて、従属変数f(x)の値が１つ決まることが関数の定義であり、関数の一義性と言う。数値$f_r(c)$を決められないので、密度分布$f_r(x)$は、点x＝cにおいて普通の関数としては、関数の一義性を保持しない。点x＝cを段差点と呼ぶ。

関数の一義性を維持するために、段差点の表現について成分を導入する。点x＝cの直近の左側を点x＝c−0、右側を点x＝c+0と略記する。関数値$f_r(c-0)$、$f_r(c+0)$が存在し、一義性を保持している。式(4)で左連続成分$f_h(c)$、式(5)で段差成分$f_d(c)$を定義する。

$$f_h(c)=f_r(c-0) \tag{4}$$

$$f_d(c)=f_r(c+0)-f_r(c-0) \tag{5}$$

点 , で区切って成分を並べ、括弧 ( ) で包んで、質量密度$f_0(x)$を式(6)のように表す。

$$f_0(c)=\{f_h(c),f_d(c)\} \tag{6}$$

式(6)は従属変数が$f_h(c)$と$f_d(c)$の2つ有り、普通の関数ではないが、数ベクトルと同じ表現であり、一義性を保持している。成分$f_h(c)$の単位も成分$f_d(c)$の単位もkg/mで同じである。点x＝cにおける関数値$f_r(c)$は決め難いが、関数値$f_0(c)$は式(7)を用いて成分2個で表される。

$$f_0(c)=\{f_r(b),-f_r(b))\} \tag{7}$$

(4) 連続関数と段差の表現の統合

区間x≠cについても、質量密度を関数$f_r(x)$から成分表示$f_0(x)$に修正し、式(4)､式(5)､式(6)と同型の式(8)､式(9)､式(10)で質量密度$f_0(x)$を定義すると、連続関数と段差の表現が統合される。

$$f_h(x)=f_r(x-0) \tag{8}$$

$$f_d(x)=f_r(x+0)-f_r(x-0) \tag{9}$$

$$f_0(x)=\{f_h(x),f_d(x)\} \tag{10}$$

区間x≠cにおいては、関数値$f_r(x-0)$、$f_r(x+0)$に加えて関数値$f_r(x)$が存在し、一義性を保持している。区間x≠cについて式(8)の計算をすると、式(11)が成り立ち、式(9)の計算をすると、式(12)が成り立つ。

$$f_h(x)=f_r(x) \qquad (x\neq c) \tag{11}$$

$$f_d(x)=0 \qquad (x\neq c) \tag{12}$$

式(8)の左連続成分$f_h(x)$は区間x≠cにおいて連続であり、区分的に連続な関数である。式(9)の段差成分$f_d(x)$は離散関数である。

(5) 離散関数を用いた分布の表現

小石の質量分布を関数$f_1(x)$で表すと、点x＝dに大きさPの質量が集中しているから式(13)が成り立つ。

$$f_1(d)=P \tag{13}$$

区間x≠dにおいては小石が無いから、式(14)が成り立つ。

$$f_1(x)=0 \qquad (x\neq d) \tag{14}$$

小石の質量分布$f_1(x)$は式(13)、式(14)の離散関数で表すことができる。

(6) 鉛筆と小石の質量分布の統合

鉛筆と小石の質量分布を統合して表す関数をf(x)とする。関数f(x)は関数$f_0(x)$と関数$f_1(x)$の和であるが、単純な足し算ではない。単位を添えて、式(15)のように表す。

$$f(x)\,\mathrm{kg/m}=f_0(x)\,\mathrm{kg/m}+f_1(x)\,\mathrm{kg} \tag{15}$$

単位kg/mが代表であると考え、関数f(x)にも単位kg/mを添える。式(15)の両辺を単位kg/mで割り算すると、式(16)のようになる。

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)\cdot\mathrm{m} \tag{16}$$

式(16)において単位mは、成分$f_0(x)$と成分$f_1(x)$を区別する目印になっている。式(16)の$f_0(x)$を第0次成分、式(16)の$f_1(x)$を第1次成分と言う。成分を用いると、式(17)のように書き換えられる。

$$f(x)=\{f_0(x),f_1(x)\} \tag{17}$$

式(10)を式(17)に代入すると、式(18)が得られる。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x)\} \tag{18}$$

質量の分布は左連続成分、段差成分、第1次成分の成分3個の関数で表すことができる。