超関数の理論の4つの型

2013年12月7日
小林　保

(1) はじめに

超関数について、大まかに３つの型の理論が知られている。理論構成の特徴を捉えると、汎関数型の理論、実軸段差型の理論、演算子型の理論と呼ぶことができる。これらの理論に加えて、成分表示型の理論を提案した。４つの型の理論について、概略を説明する。

(2) 汎関数型の理論

理論を集大成した数学者の名前を取って、Schwartzの理論と呼ばれている。理論構成の特徴を捉えて、汎関数型の理論と呼ぶこともできる。

変数xを1つ決めると、変数xに応じて数値f(x)が求まる規則を関数と言う。関数$\phi(x)$を１つ決めると、関数$\phi(x)$に応じて数値$\tau(\phi)$が求まる規則を汎関数と言う。

補助変数εを含む関数F(x)が実数全域で滑らかであるとする。式(1)の左辺の$\phi(x)$以外の部分が関数$\phi(x)$に作用して、式(1)の右辺の数値$\tau(\phi)$が求まる規則を、式(1)が表している。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\phi(x)\,dx = \tau(\phi) \qquad (1)$$

式(1)の規則は汎関数である。式(1)の積分区間は実数全域$-\infty < x < +\infty$であり、積分が収束するために、被積分関数F(x)$\phi(x)$は急減少関数に限定される。式(1)が成り立つとき、近似関数F(x)が超関数f(x)を定義すると言う。特異点においては、超関数f(x)は関数値を持たない。

分布の場と分布する量の対応として、分布は説明される。Schwartzの理論は、分布の場と分布する量に言及しないので、分布を説明することに成功していないと思われる。

(3) 実軸段差型の理論

理論を着想した数学者の名前を取って佐藤の理論と呼ばれている。理論構成の特徴を捉えて、実軸段差型の理論と呼ぶこともできる。

複素関数F(z)を用いて式(2)で超関数f(x)を定義する。関数F(z)を母関数と言う。

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)\} \qquad (2)$$

超関数f(x)が普通の関数の場合、母関数F(z)は複素平面のx軸上に段差を持つ。特異点においては、超関数f(x)は関数値を持たない。

佐藤の理論においては、超関数が分布を表すとは考えていないらしい。

(4) 演算子型の理論

微分方程式を代数的に解く計算の技術として、演算子法が発展してきた。1953年頃にポーランドのミクシンスキーが書いた教科書にわかり易く記述されている。演算子が超関数と密接に関連した性質を示すので、演算子法を超関数の演算子型の理論と呼ぶこともできる。

演算子法においては、関数と関数値を厳密に区別する。変数xに関数fが作用して関数値f(x)が生じると考え、関数fも演算子である。数値と定数関数も厳格に区別される。演算子法で用いる関数fは、式(3)のように区間$-\infty < x < 0$において関数値0であり、右半分関数である。

$$f(x) = 0 \qquad (-\infty < x < 0) \qquad (3)$$

関数演算子、数値演算子、移動演算子、積分演算子、微分演算子を定義し、演算子の積と和を定義する。積と和に関して、分配の法則が成り立つ。微分演算子sと関数fの積sfと導関数f’は式(4)の関係がある。

$$f' = sf - f(0) \qquad (4)$$

式(4)を用いて微分方程式を書き換えると、積と和が定義されたので、代数的な計算により、微分方程式を解くことができる。

演算子法においては、定数関数{1}と積分演算子は同じである。定数関数{1}はヘビサイド関数とほぼ同じである。数値演算子1はディラック関数とほぼ同じである。演算子法においては、演算子が分布を表すとは考えていないらしい。

(5) 成分表示型の理論

独立変数xを1つ決めると、独立変数xに応じて従属変数f(x)が求まる規則を関数と言う。超関数を関数の概念の拡張と捉えると、関数の基本的な定義を変えてはいけない。既存の3つの理論においては、特異点における関数値が定義されない。特異点における関数値を表現するために、成分表示を導入した。

特異化変数εを含む関数F(x)が定義域で滑らかであるとする。左連続成分$f_h(x)$、段差成分$f_d(x)$、第1次成分$f_1(x)$、・・・第n次成分$f_n(x)$、・・・を近似関数F(x)を用いて、式(5)～式(8)で計算する。

$$f_h(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho) \qquad (5)$$

$$f_d(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho) - F(x-\rho)\} \qquad (6)$$

$$f_1(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t)\,dt \qquad (7)$$

$$f_n(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1} F(t)\,dt \qquad (8)$$

成分を組にして、式(9)で表す。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots\} \qquad (9)$$

式(5)～式(8)は、区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$における近似関数F(x)の状況から超関数の点t＝xにおける成分を計算している。区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$を点域と呼び、変数$\rho$を点半径変数と呼ぶ。

独立変数の定義域が分布の場に対応し、従属変数の値域が分布する量に対応する。成分表示型の理論は分布を説明することができる。

(6) おわりに

汎関数型の理論、実軸段差型の理論の既存の2つの理論においては、特異点において関数値が定義されない。独立変数と従属変数の対応という性質を、特異点において失っている。演算子型の理論における演算子は、関数演算子以外は、独立変数と従属変数の対応という性質を、元々、持っていない。成分表示型の理論は、独立変数と従属変数の対応という性質を維持している。