

(1) はじめに

微分不能な関数を無理矢理に微分することが、超関数の理論の目的の1つである。土木技術の路線選定において、滑らかでない折れ線に曲線を挿入して滑らかにする方法がある。路線選定から示唆を得て、超関数の理論の入門の部分を構成することを試みよう。

(2) 折れ線

道路や鉄道の設計の過程において路線選定を行う。地形や土地利用の状況を勘案しながら、起点から終点まで接続する。初めに図-1に示すように、

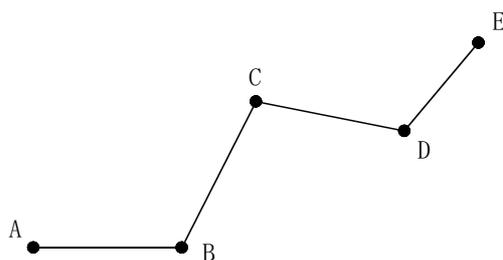


図-1 直線を連ねた折れ線

起点Aから終点Eまで直線AB、直線BC、直線CD、直線DEを連ねて接続する。点B、点C、点Dで折れ曲がっており、滑らかでない。直線を連ねた折れ線である。

(3) 曲線の挿入

図-1のABCの部分を取り出して拡大し、図-2を

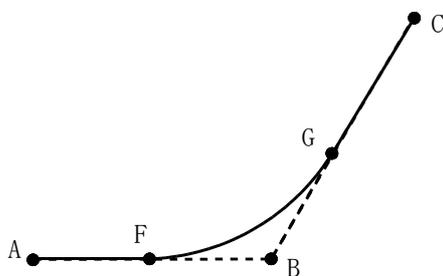


図-2 直線と円弧の接続

描く。折れ曲がった点Bの付近に円弧FGを挿入して直線ABと直線BCを滑らかに接続する。式(1)が成り立っている。

$$BF = BG \quad (1)$$

円弧FGを挿入した場合、車両が直線部AFを進行するとき、進行方向に垂直の向きの力は作用しないが、円弧FG部では遠心力が働き、進行方向に垂直の向きの力が作用する。路線AFGCを進行するとき、円弧FGの半径rとすると、点Fで曲率が0から $\frac{1}{r}$ に不連続に急増する。速度が一定であれば、遠心力は曲率に比例するから、点Fで遠心力が急増し、乗り心地を害し危険である。

(4) 緩和曲線

遠心力の急増を避けるために、図-3のように円弧FGの一部JKだけを残し、点Fより点Aに近い点Hから点Jまで、滑らかに曲率を変化させる。曲線

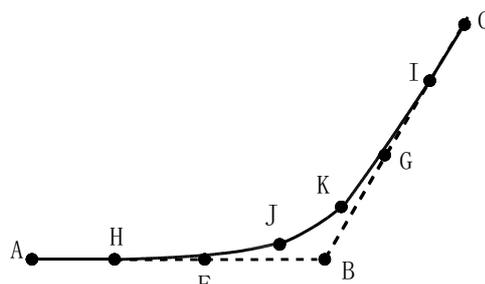


図-3 緩和曲線の挿入

HJを緩和曲線と呼ぶ。曲線KIも緩和曲線である。道路の設計ではクロソイド曲線が緩和曲線として用いられている。

(5) 近似関数

式(2)、式(3)の関数 $f(x)$ は点 $x=0$ において折れ曲がっており、微分不能である。

$$f(x) = 0 \quad (x \leq 0) \quad (2)$$

$$f(x) = x \quad (0 \leq x) \quad (3)$$

区間 $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ に曲線を挿入した式(4)、式(5)、式(6)の関数 $F(x)$ は実数全域で滑らかであり、微分可能である。

$$F(x) = 0 \quad (x \leq -\epsilon) \quad (4)$$

$$F(x) = \frac{1}{32\epsilon^5}x^6 - \frac{5}{32\epsilon^3}x^4 + \frac{15}{32\epsilon}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{32}\epsilon \quad (-\epsilon \leq x \leq \epsilon) \quad (5)$$

$$F(x) = x \quad (x \geq \epsilon) \quad (6)$$

補助変数 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、式(7)が成り立つから、関数 $F(x)$ は関数 $f(x)$ の近似関数である。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x) = f(x) \quad (7)$$

式(2)、式(3)の関数 $f(x)$ と式(4)、式(5)、式(6)の関数 $F(x)$ の関係は、図-3の折れ線AHFBGICと図-3の曲線AHJKICの関係と類似している。式(4)、式(6)の直線に区間 $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ で式(5)の曲線を挿入し、滑らかにしている。

(6) 矛盾する2つの性質

関数 $f(x)$ は点 $x=0$ において微分不能であり、関数 $F(x)$ は式(5)の働きで、微分可能である。微分不能と微分可能の矛盾する2つの性質を併せ持つ「もの」を超関数 $f(x)$ と呼ぶ。必要があれば、関数 $f(x)$ 、超関数 $f(x)$ の註記を付けて区別する。

式(7)の極限操作を完全には行わず、補助変数 ϵ を小さい定数に固定する。数値 ϵ が定数であるから、関数 $F(x)$ は微分可能である。数値 ϵ が小さいから、区間 $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ と点 $x=0$ を同じと見なすことができ、式(8)と考えて良い。

$$F(x) \doteq \text{関数} f(x) \quad (8)$$

式(8)の状態が超関数 $f(x)$ である。

関数 $F'(x)$ はヘビサイド関数 $\eta(x)$ の近似関数である。関数 $F''(x)$ はディラック関数 $\delta(x)$ の近似関数である。

(7) おわりに

関数の微分不能な部分に、滑らかな曲線を挿入することにより、関数を微分可能にすることができ、曲線の挿入により微分可能になった関数は超関数と呼ばれる。関数への曲線の挿入は、路線選定における曲線の挿入と類似している。