点半径変数の発見

2013年10月15日
小林　保

(1) 正規関数によるディラック関数の近似

式(1)の関数$\Delta(x)$は数値0を平均値とし、数値$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$を標準偏差とする正規分布関数である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (1)$$

ディラック関数$\delta(x)$の近似関数として式(1)の関数$\Delta(x)$がしばしば用いられる。

(2) 定積分の集中

ディラック関数$\delta(x)$は大きさ1の量が点x＝0に集中して分布する状況を表すために用いられる。積分で式(2)と表すことが適切である。

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)dx=1 \qquad (2)$$

式(2)の右辺が大きさ1の量を表示し、積分区間の$-0\leqq x\leqq +0$が点x＝0を表示する。式(2)は点x＝0における定積分である。式(2)は点x＝0における積分が0でない値になっており、定積分の集中と呼ぶ。しかし、式(2)がディラック関数$\delta(x)$の説明に用いられた例は見当たらない。式(3)がディラック関数$\delta(x)$の説明に用いられる場合が多い。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \qquad (3)$$

式(3)の右辺が大きさ1の量を表示するが、積分区間は実数全域$-\infty<x<+\infty$であり、点x＝0を表示していない。式(3)は区間$-\infty<x<+\infty$に大きさ1の量が分散していると理解される。定積分の集中を表すためには、式(3)ではなく、式(2)で表すことが適切である。

(3) 近似関数を用いた計算

区間$-\varepsilon\leqq x\leqq +\varepsilon$は補助変数$\varepsilon\to 0$の極限のとき、区間$-0\leqq x\leqq +0$に収束するから、式(4)が成り立ち、式(2)が得られると期待される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)dx=1 \qquad (\text{不成立}) \qquad (4)$$

しかし、式(4)は成立しない。式(4)を計算するために、式(5)を計算する。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)dx \qquad (5)$$

式(6)の変数変換すると、式(7)が成り立つ。

$$\frac{x}{\varepsilon}=\frac{z}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

$$dx=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}dz \qquad (7)$$

$x=-\varepsilon$が$z=-\sqrt{2}$に対応し、$x=+\varepsilon$が$z=+\sqrt{2}$に対応するから、式(8)のように計算される。

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)dx&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}dz\\&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})dz\\&=2\int_{0}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})dz \qquad (8)\end{aligned}$$

式(8)の最後辺の中の被積分関数が平均値0、標準偏差1の正規分布関数であるから、$\sqrt{2}=1.41$として関数表から0.4207を求め、式(9)のように計算される。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)dx=2\times 0.4207=0.841 \qquad (9)$$

$\varepsilon\to 0$の極限を考えても、式(9)から式(4)は得られない。式(1)の関数$\Delta(x)$を用いて式(10)が成り立つから、式(3)は確かに成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)dx=1 \qquad (10)$$

(4) 特異化変数と点半径変数の分離

式(1)の関数$\Delta(x)$の補助変数εについて、$\varepsilon\to 0$の極限を考えると、点x＝0における関数値$\Delta(0)$が発散し、点x＝0が特異点になる。補助変数εを特異化変数と呼ぶ。特異化変数εと異なる補助変数ρを導入すると、式(11)が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)dx=1 \qquad (11)$$

式(11)が式(2)を意味すると考えて良い。補助変数ρは点x＝0と同一と見なす区間$-\rho\leqq x\leqq +\rho$の半径であり、点半径変数と呼ぶ。点半径変数を用いた式(11)の説明は、筆者の独創である。式(11)において、特異化変数εを点半径変数ρより先に極限操作することが重要である。式(9)は式(11)と比べると、特異化変数と点半径変数が未分離であり、兼用されている。

式(12)の変数変換をすると式(13)が得られる。

$$\frac{x}{\varepsilon}=y \qquad (12)$$

$$\frac{dx}{\varepsilon}=dy \qquad (13)$$

ρより先にεの極限操作をするから、$\varepsilon\to 0$のとき、$x=-\rho$が$y=-\infty$に対応し、$x=+\rho$が$y=+\infty$に対応するから、式(14)のように計算され、式(11)が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{-\rho}^{+\rho}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2)dx&\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2)dy\\&=1 \qquad (14)\end{aligned}$$

(5) 成分の着想

特異点x＝0以外についても、式(11)から示唆を得て式(15)を作る。

$$\delta_1(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\Delta(t)dt \qquad (15)$$

式(15)の右辺でx＝0とし、変数tを変数xに置き換えると、式(11)の左辺が得られる。式(15)を計算すると式(16)、式(17)が得られる。

$$\delta_1(x)=1 \qquad (x=0) \qquad (16)$$

$$\delta_1(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (17)$$

式(16)、式(17)の関数$\delta_1(x)$は、ディラック関数$\delta(x)$を説明する特徴的な関数であり、1次の集中成分と呼ぶ。

(6) 点半径変数の発見の意味

特異化変数εから点半径変数ρを分離することを考え付く前は、式(11)の計算ができず、式(2)を用いて定積分の集中を説明することができなかった。そのため、代わりに式(10)の計算を行い、式(3)を説明に用いていた。点半径変数の発見により、式(3)を説明に用いる必要が無くなった。