関数方程式 x・f(x)＝1

2013年9月23日
小林　保

(1) はじめに

未知関数f(x)についての式(1)の関数方程式について検討する。

$$x\cdot f(x)=1 \qquad (1)$$

Schwartzの理論においては、関数の範囲で考える場合と超関数の範囲で考える場合で、解が異なると説明される。

関数の範囲で考える場合、解は式(2)で求められ、分子1、分母xの分数関数である。

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

超関数の範囲で考える場合、未知関数f(x)についての式(3)の関数方程式の解は式(4)で求められ、ディラック関数$\delta(x)$である。

$$x\cdot f(x)=0 \qquad (3)$$

$$f(x)=k\cdot\delta(x) \qquad (4)$$

kは任意の定数である。式(2)と式(4)を重ね合わせ、式(5)が式(1)の関数方程式の解である。

$$f(x)=\frac{1}{x}+k\cdot\delta(x) \qquad (5)$$

(2) 定義域

式(2)の分数関数は分子1、分母xであり、分母が0の分数は存在しないから、解関数f(x)の定義域は区間x≠0である。ディラック関数$\delta(x)$は、点x＝0に特異点を持ち、区間x≠0においては式(6)のように関数値0である。

$$\delta(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (6)$$

式(2)と式(5)が区間x≠0で成り立っているとすると、式(6)の下では式(2)と式(5)は全く同じことを意味し、式(2)の解と式(5)の解を区別する意味が無い。Schwartzの理論においては、式(5)の解関数f(x)の定義域として点x＝0を含んでいると理解される。

(3) Schwartzの理論の定義

Schwartzの理論においては、補助変数εを含む近似関数$\Delta(x)$が式(7)を満足するとき、近似関数$\Delta(x)$がディラック関数$\delta(x)$を定義する、と言い、式(8)のように略記する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad (8)$$

式(7)と式(8)の積分区間が無限大であることから、積分が収束するために関数$\phi(x)$は急減少関数に限定される。関数$\phi(x)$を入力し、数値$\phi(0)$を出力する汎関数を介して、間接的に超関数を定義し、説明する。式(7)を満足する近似関数$\Delta(x)$は無数に多く存在するが、少なくとも式(9)が式(7)を満足する。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad (9)$$

式(9)の定義域は$-\infty<x<+\infty$であるが、$\varepsilon\to 0$の極限変動に伴って、点x＝0において発散し、関数値を持たない。ディラック関数$\delta(x)$が点x＝0において関数値を持たないことは明らかであるが、式(7)と式(8)の積分区間から点x＝0を除外しておらず、定義域に含むか含まないか、明示を避けている。汎関数を介して、間接的に超関数を定義し、説明するうちに、ディラック関数$\delta(x)$の定義域が曖昧になっている。暗黙のうちに、点x＝0を定義域に含んでいるようである。

超関数$\frac{1}{x}$は式(10)の汎関数を満足すると定義される。右辺のvは数値である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\phi(x)\,dx=v \qquad (10)$$

点x＝0において超関数$\frac{1}{x}$が発散するから、数値vは計算されないが、主値を計算して、汎関数を作っている。汎関数を介して、間接的に超関数を定義し、説明するうちに、超関数$\frac{1}{x}$の定義域も曖昧になっている。暗黙のうちに、点x＝0を定義域に含んでいるようである。

(4) 成分表示型の理論の定義

超関数の定義域を明示するために、成分表示型の超関数を提案した。ディラック関数$\delta(x)$については式(11)、式(12)のように表される。

$$\delta(x)=(0,0,1,0,\cdots) \qquad (x=0) \qquad (11)$$

$$\delta(x)=(0,0,0,0,\cdots) \qquad (x\neq 0) \qquad (12)$$

超関数$\frac{1}{x}$を記号g(x)で表すと、普通の関数$\frac{1}{x}$を用いて式(13)、式(14)で表される。

$$g(x)=(\text{不定義}) \qquad (x=0) \qquad (13)$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{x},0,0,0,\cdots\right) \qquad (x\neq 0) \qquad (14)$$

点x＝0において関数値が存在しないから、定義域から点x＝0を除外する。式(11)と式(13)を足し算することは考えられない。

(5) おわりに

Schwartzの理論は、汎関数を介して、間接的に超関数を定義し、説明するので、定義域が曖昧になっている。式(10)で定義される超関数の定義域が点x＝0を含むことに違和感を感じる。成分表示型の理論は、成分を導入して特異点においても、関数値を定義するので、定義域が明示される。